XIII. KAVICS KUPA

2017. március 14.

Részletek a versenyszabályzatból

- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapokon (0000-tól 9999-ig).
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, akkor a választ az eredmény utolsó 4 számjegye alkotja.
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, vagy nem egyértelmű a megoldás, akkor a válaszlapra ezt írjátok: ????.
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek:

$$\sqrt{2} \approx 1.4142 \quad \sqrt{3} \approx 1.7321 \quad \sqrt{5} \approx 2.2361 \quad \sqrt{7} \approx 2.6458 \quad \pi \approx 3.1416$$

Időhatárok

- A Jolly feladat kijelölésére az első 15 percben van lehetőség.
- Az első 30 perc leteltével már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. Kérdéseket csak a csapatkapitányok tehetnek fel a zsűrinél.
- 90 perc elteltével a versenynek vége.

1. feladat A Babona Szállóban 2000 szoba van, ezeket 1-től kedve pozitív egészekkel számozzák, kihagyják azonban az összes olyan számot, amelyben 1-es számjegyet 3-as követ (így tehát nincs például se 13-as, se 413-as, se 1134-es szoba; viszont van 103-as vagy 331-es szoba). Hányas a legnagyobb szobaszám? **(20 pont)**

2. feladat Számítsd ki:

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{k^3+1}{k^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{13^3+1}{13^3-1}$$

A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(20 pont)**

3. feladat Legfeljebb hány egymást követő hónap telhet el úgy, hogy egyikben se essen 13-a péntekre? **(25 pont)**

4. feladat A Lukrécia utca szélére reggel kiül egy fekete macska. Ha jön egy autó, akkor a következőképpen dönti el, hogy átmenjen-e előtte:

- Az első autó előtt biztosan átmegy.
- Ha az előző autó előtt átment, akkor a következő autó előtt feldob egy pénzt: ha írás, akkor átmegy, ha fej, akkor viszont helyben marad.
- Ha az előző autó előtt nem ment át, akkor biztosan átmegy a következő előtt.

Mekkora a valószínűsége, hogy a fekete macska átmegy a 13. autó előtt?
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(25 pont)**

5. feladat Hány olyan legfeljebb száz jegyű pozitív egész szám van, melynek négyzete osztja azt a számot, melyet úgy kapunk, hogy az eredeti számot leírjuk kétszer egymás után (a 10-es számrendszerben)? Például $143^2 \mid 143143$. **(30 pont)**

6. feladat Egy parlamentben a képviselők 2/3 része kormánypárti, 1/3 része ellenzéki. A kormánypárti képviselők sosem változtatnak a véleményükön, míg az ellenzéki képviselők 1/2 eséllyel változtatnak a véleményükön. Egyszer tévedésből kétszer szavaztak ugyanarról a kérdésről. János mindkétszer ugyanúgy szavazott. Mekkora az esély arra, hogy ha harmadszor is megszavaztatnák ugyanazt a kérdést, János akkor is ugyanúgy szavazna?
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(30 pont)**

7. feladat Adott a síkon 13 egyenes. Semelyik kettő nem párhuzamos vagy merőleges és semelyik három nem megy át egy ponton. Ahol két egyenes metszi egymást, ott lemérjük az általuk bezárt hegyesszöget.
Legfeljebb hány fok lehet ennek a 78 lemért szögnek az összege? **(30 pont)**

8. feladat A térben az e egyenesen az A, B, C pontok ebben a sorrendben követik egymást úgy, hogy $AB = 27$ egység és $BC = 18$ egység. Határozzuk meg az e és az f egyenes távolságát, ha az f egyenes távolsága az A, B, C pontoktól rendre 17, 10 és 8 egység. **(35 pont)**

9. feladat Legyen $0 \leq x \leq y \leq 1$. Mi a következő kifejezés lehetséges legagyobb értéke?

$$x^2(y-x) + y^2(1-y)$$

A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(35 pont)**

10. feladat Vízszintes talajon egymástól 8 méter távolságra egy 3 és egy 3,9 méter magas (függőleges) oszlop található. Egy 10 méter hosszú kötél két végét a két oszlop tetejéhez rögzítjük. A kötelet megfeszítjük az egyik pontjánál fogva. Mekkora a legkisebb lehetséges távolság a (vízszintes) talaj és a kötél megfogott pontja között? A választ milliméterben add meg! **(35 pont)**

11. feladat Tekintsük 10 egymást követő évben az éves magyar csapadékmennyiséget (feltételezzük, hogy ez 10 különböző szám). Egy évet rekordévnek nevezünk, ha abban az évben több eső hullott, mint az azt megelőző években (a 10 éves perióduson belül). Mennyi a rekordévek számának várható (átlagos) értéke?
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(35 pont)**

12. feladat Egy 13 fős baráti társaság 13 napig nyaral a Balaton partján. Minden nap négyen kihajóznak egy vízibiciklivel. Első reggel megállapodnak, hogy úgy szervezik a vízibiciklizéseket, hogy mindenki mindenkivel utazzon együtt legalább egyszer. Az első napon Ali, Bea, Cili és Dezső hajózott ki. Hányféleképpen választhatják ki a második napon kihajózó négyest? **(35 pont)**

14. feladat Ha x egy pozitív egész szám, akkor jelölje $K(x)$ azon y pozitív egészek számát, amelyekre $x+y$ osztja xy-t. Hány olyan 100-nál nem nagyobb n pozitív egész szám van, amelyre $K(n)=13$? **(35 pont)**

15. feladat 10 golyó mindegyikét véletlenszerűen belerakjuk 5 doboz valamelyikébe. Mekkora az esély arra, hogy pontosan egy doboz maradjon üresen?
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összegének utolsó négy számjegye. **(40 pont)**

16. feladat Az $ABKC$ konvex négyszög AB oldalának hossza 2 egység, a BC átló hossza 1 egység. Az $ABC\sphericalangle$, $BKA\sphericalangle$, $BKC\sphericalangle$ szögek nagysága rendre $120°$, $30°$ és $60°$. Határozd meg BK^2 értékét!
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(40 pont)**

17. feladat Keressük meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyhez található olyan k pozitív egész szám, hogy teljesüljön az

$$n^k = k^{n-k}$$

egyenlet. Mennyi ezen n számok összege? **(40 pont)**

18. feladat Határozd meg a legnagyobb r valós számot, melyre igaz a következő állítás: ha az egységnyi területű ABC háromszög kerületét a P, Q, és R pontok három egyforma hosszúságú részre bontják, akkor a PQR háromszög területe legalább r.
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(45 pont)**

19. feladat Egy boltban egy 100 000 forint értékű számítógép árán a következő hat műveletet hajtják végre valamilyen sorrendben: 10 000 forinttal növelik az árát, 10 000 forinttal csökkentik az árát, 60%-kal növelik az árát, 25%-kal növelik az árát, 37,5%-kal csökkentik az árát, 20%-kal csökkentik az árát. Hányféle lehet a számítógép ára, miután végrehajtották rajta mind a hat műveletet? **(50 pont)**

20. feladat Egy 21 fős baráti társaság minden vasárnap sakkversenyt rendez a következő módon: a játékosokat először véletlenszerűen 7 darab 3 fős csoportba osztják. Egy csoporton belül mindenki játszik mindenkivel, és ezután minden csoportból a legjobb játékos kerül a döntőbe, ahol ismét mindenki játszik mindenkivel, így alakul ki a végső sorrendje az első 7 helyezettnek. András a legutóbbi 3 alkalommal mindig bejutott a legjobb 7 játékos közé, és ott harmadik, negyedik és hetedik helyezést ért el. Mekkora az esélye annak, hogy András legközelebb is bekerül a legjobb 7 játékos közé, és végül ötödik lesz? (A játékosok erősorrendje nem változik a hetek során, és az erősebb játékos mindig legyőzi a gyengébbet.)
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(50 pont)**

21. feladat Egy tanteremben egy polcon 8 különböző könyv van egymás mellett egy sorban. 23 diák egyesével bemegy a terembe, és mindegyikük megcserél két szomszédos könyvet. Hány különböző fajta sorrendjét kaphatjuk így meg a könyveknek?
A válasz a kapott szám utolsó négy jegye. **(50 pont)**