A 2021. évi Kardos-Montágh Matematikaverseny feladatainak megoldása

1. feladat: *Legyenek a, b és c olyan pozitív számok, amelyekre $abc = 1$. Igazoljuk, hogy*

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}. \qquad \text{(6 pont)}$$

I. Megoldás. *(Balázs Bálint dolgozata alapján)*

Alkalmazzuk az ab és ca pozitív számokra a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{ab + ca}{2} \geq \sqrt{ab \cdot ca} = \sqrt{a \cdot abc} = \sqrt{a},$$

hiszen feltételként szerepelt az is, hogy $abc = 1$. A másik két párra is felírva ugyanezt, kapjuk, hogy

$$\frac{ab + bc}{2} \geq \sqrt{b},$$

$$\frac{bc + ca}{2} \geq \sqrt{c}.$$

A három egyenlőtlenség összeadásával:

$$\frac{ab + ca}{2} + \frac{ab + bc}{2} + \frac{bc + ca}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c},$$

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha mindhárom számtani-mértani közép esetén egyenlőség teljesül, azaz $a = b = c$.

II. Megoldás. *(Fehér Anna megoldása alapján)*

Használjuk fel, hogy $abc = 1$, illetve $\sqrt{abc} = 1$:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{a}}{1} + \frac{\sqrt{b}}{1} + \frac{\sqrt{c}}{1} = \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

A két szám számtani és mértani közepei közötti egyenlőtlenséget használjuk az $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ számokból képzett párokra:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{bc}} \leq \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2}.$$

E három egyenlőtlenséget összeadva:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

A jobboldali számlálókban ismét beírható, hogy $abc = 1$ és így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b} + \frac{abc}{c} = bc + ca + ab.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a számtani és mértani közepek mindegyikénél egyenlőség teljesül, vagyis ha $a = b = c$.

2. feladat: *Az a, b, c, d tetszőleges pozitív számok esetén mutassuk meg, hogy*

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 81abcd. \qquad \text{(6 pont)}$$

Mely a, b, c, d számok esetén teljesül az egyenlőség?

I. Megoldás. *(Fehér Anna megoldása)*
Alkalmazzzuk az $a^2, a, 1$ pozitív számokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a^2 + a + 1}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot a \cdot 1} = a, \quad \text{azaz} \quad a^2 + a + 1 \geq 3a.$$

Ugyanezzel a módszerrel:

$$b^2 + b + 1 \geq 3b, \quad c^2 + c + 1 \geq 3c, \quad d^2 + d + 1 \geq 3d.$$

Az egyenlőtlenségekben mindenütt pozitív számok szerepelnek, a négy egyenlőtlenség megfelelő oldalainak összeszorzásával éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 81abcd.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha mind a négy esetben a számtani és mértani közepeknél egyenlőség teljesül, tehát $a = b = c = d = 1$.

II. Megoldás. *(Nguyen Le Quynh-Mai megoldása alapján)*
Emeljük ki az $a^2 + a + 1$ összegből az a pozitív számot:

$$a^2 + a + 1 = a(a + \frac{1}{a} + 1).$$

Pozitv azám és reciprokának összege legalább 2, így

$$a(a + \frac{1}{a} + 1) \geq a(2 + 1) = 3a.$$

Itt - és a további három esetében is - egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = 1$, - illetve $b = c = d = 1$. Egy lépésben a befejezés:

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 3a \cdot 3b \cdot 3c \cdot 3d = 81abcd.$$

Megjegyzés: Az állítás szerkezete mutatja, hogy a változók egymástól függetlenül szerepelnek, így elegendő egyesével vizsgálni a tényezőket pl. $a^2 + 3a + 1 \geq 3a$.

3. feladat: *Legyenek a, b, c és d pozitív valós számok. Bizonyítsuk a következő egyenlőtlenséget:*

$$16(abc + abd + acd + bcd) \leq (a + b + c + d)^3. \qquad \text{(8 pont)}$$

I. Megoldás. *(Nguyen Nóra-Ngoc Khanh megoldása)*

Használjuk az a, b és c, d pozitív számpárokra vonatkozó számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget négyzetre emelt alakban:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \text{és} \qquad \sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2},$$

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \qquad \text{és} \qquad cd \leq \frac{(c+d)^2}{4}.$$

ezek alapján becsüljük meg felülről a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát:

$$16(abc+abd+acd+bcd) = 16[ab(c+d)+cd(a+b)] \leq 16\left[\frac{(a+b)^2}{4}(c+d) + \frac{(c+d)^2}{4}(a+b)\right] =$$

$$= 4(a+b)(c+d)(a+b+c+d).$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b$ és $c = d$. Most alkalmazhatjuk az előbbi becslést az $(a+b)$ és $(c+d)$ számokra is:

$$(a+b)(c+d) \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{4}.$$

Ezzel pedig folytatható a felső becslés:

$$16(abc+abd+acd+bcd) \leq 4(a+b)(c+d)(a+b+c+d) \leq$$

$$\leq 4\frac{(a+b+c+d)^2}{4}(a+b+c+d) = (a+b+c+d)^3.$$

Egyenlőség itt az $a+b = c+d$ esetben, amelyet az előbbi egyenlőségi feltétellel összevetve látható, hogy az egyenlőség tényleges feltétele: $a = b = c = d$.

II. Megoldás. *(Somlói Dominik megoldása alapján)*

Az egyenlőtlenség bal oldalát fogjuk ismét felülről megbecsülni. Ennek érdekében kiemelünk $8(a+b)(c+d)$-t.

$$16(abc+abd+acd+bcd) = 16[ab(c+d)+cd(a+b)] = 8(a+b)(c+d)\left(\frac{2ab}{a+b} + \frac{2cd}{c+d}\right).$$

A $\frac{2ab}{a+b}$ az a és b számok harmonikus közepe, amely biztosan kisebb vagy egyenlő, mint a számtani közepük:

$$= 8(a+b)(c+d)\left(\frac{2ab}{a+b} + \frac{2cd}{c+d}\right) \leq 8(a+b)(c+d)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right) = 4(a+b)(c+d)(a+b+c+d).$$

A bizonyítandó állítás így:

$$4(a+b)(c+d)(a+b+c+d) \leq (a+b+c+!d)^3.$$

Egyszerűsíthetünk a pozitív $(a+b+c+d)$-vel. Ezután ekvivalens átalakításokkal egy azonosan igaz egyenlőtlenséget kapunk:

$$4(a+b)(c+d) \leq [(a+b)+(c+d)]^2,$$

$$4(a+b)(c+d) \leq (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2,$$

$$0 \leq (a+b)^2 - 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 = (a+b-c-d)^2.$$

Ezzel az egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Az egyenlőséghez ismét két lépésben juthatunk el. Először a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenségnél $a = b$ és $c = d$ szükséges, majd az utolsó lépésben emellett még az is, hogy $a+b = c+d$, tehát összevetve $a = b = c = d$.

4. feladat: *Legyenek a, b és c pozitív számok. Mutassuk meg, hogy*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2. \qquad \text{(10 pont)}$$

I. Megoldás. *(Xiong Benjamin Victor megoldása)*

Bővítsük a $\sqrt{\frac{a}{b+c}}$ kifejezést, majd a nevezőben szereplő szorzatot becsüljük felülről a számtani középpel. A nevező növelése miatt ezzel alsó becslést adunk.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sqrt{\frac{a^2}{a(b+c)}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c}.$$

Ugyanezt az eljárást alkalmazva a másik két törtre is:

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} = \sqrt{\frac{b^2}{b(c+a)}} = \frac{b}{\sqrt{b(c+a)}} \geq \frac{b}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2b}{a+b+c},$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} = \sqrt{\frac{c^2}{c(a+b)}} = \frac{c}{\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{c}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2c}{a+b+c}.$$

A megfelelő oldalak összeadásával:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c}.$$

Meg kell még vizsgálni, hogy fennállhat-e az egyenlőség. Ehhez mindhárom esetben a számtani és mértani közepeknél egyenlőségnek kellene teljesülnie, azaz az $a+b = c$, $b+c = a$ és $c + a = b$ feltételeknek egyszerre kellene teljesülniük, ez pedig ismét lehetetlen.

II. Megoldás. *(Telek Johanna megoldása)*

Vegyük először az $(x-1)^2 \geq 0$ azonosan igaz egyenlőtlenséget. Ezt kicsit rendezve már közvetlenül használható lesz a bizonyításhoz.

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

$$\frac{1}{2}(x^2+1) \geq x.$$

Írjuk az x helyére sorra a $\sqrt{\frac{b+c}{a}}$, $\sqrt{\frac{c+a}{b}}$, $\sqrt{\frac{a+b}{c}}$ értékeket:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}+1\right) \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{c+a}{b}+1\right) \geq \sqrt{\frac{c+a}{b}},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{c}+1\right) \geq \sqrt{\frac{a+b}{c}}.$$

A bal oldalakon közös nevezőre hozva és véve a pozitív kifejezések reciprokait az egyenlőtlenségek iránya megfordul:

$$\frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}, \qquad \frac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{b}{c+a}},$$

$$\frac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Most összeadjuk a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait:

$$\frac{2a+2b+2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Meg kell még vizsgálni, hogy fennállhat-e az egyenlőség. Ehhez mindhárom esetben a gyök alatti törteknek 1-gyel kell egyenlőnek lenniük, azaz $a+b=c$, $b+c=a$ és $c+a=b$ feltételeknek egyszerre kellene teljesülniük, ez pedig lehetetlen (a számok pozitivitása miatt $a<c<b<a$ ellentmondás).

5. feladat: *Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyeknek összege 3. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}. \qquad \text{(10 pont)}$$

medskip

Megoldás. *(Nguyen Le Quynh-Mai megoldása alapján)*

Alkalmazzunk a törtek számlálójában ,,teveszabályt” annak érdekében, hogy rendre az a, b, c értékeket le tudjuk választani:

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a+ab^2-ab^2}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2}.$$

Ugyanígy járunk el a másik két tört esetében is:

$$\frac{b}{1+c^2} = b - \frac{bc^2}{1+c^2}, \qquad \frac{c}{1+a^2} = c - \frac{ca^2}{1+a^2}.$$

Ezekkel az ekvivalens átalakításokkal a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$a - \frac{ab^2}{1+b^2} + b - \frac{bc^2}{1+c^2} + c - \frac{ca^2}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Most felhasználjuk, hogy a feltétel szerint $a+b+c=3$ és rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\frac{3}{2} \geq \frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2}.$$

A jobb oldali törteket tudjuk növelni, ha nevezőiket csökkentjük a számtani-mértani közép segítségével:

$$\frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2} \leq \frac{ab^2}{2b} + \frac{bc^2}{2c} + \frac{ca^2}{2a} = \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

A befejezéshez azt kell bizonyítani, hogy a megnövelt összegre még mindig teljesül, hogy

$$\frac{ab+bc+ca}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Ezt a feltételben szereplő $a+b+c=3$ négyzetre emelésével néhány lépésben elérjük:

$$9=(a+b+c)^2=a^+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq ab+bc+ca+2ab+2bc+2ca=3(ab+bc+ca).$$

Ezt az igaz egyenlőtlenséget 6-tal osztva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. A nevezők menet közbeni becslése alapján egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a=b=c=1$.

Megjegyzés: A megoldás során az átrendezéssel elérhetővé vált, hogy alsó becslés helyett egy felső becslést keressünk. Ezt a módszert több könyvszerző is Cauchy-féle megfordítási technikának nevezi.

6. feladat: Legyenek a, b, c egy háromszög oldalainak hosszúságai. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3. \qquad \text{(6 pont)}$$

I. Megoldás. *(Balázs Bálint és Csontos András megoldása alapján)*

Egyrészt az a, b, c egy háromszög oldalainak hosszúságai, ezért a háromszög-egyenlőtlenségek teljesülése miatt az $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ pozitívak.

Másrészt az a, b, c betűk cseréjére az állítás nem változik, feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$.

Ezt követően már azt is meg tudjuk mondani, hogy mi lesz $a+b-c$, $c+a-b$ és $b+c-a$ nagyság szerinti sorrendje. Akkor kapjuk a legkisebbet, amikor a két legkisebb szám összegéből vonjuk ki a legnagyobbat és akkor kapjuk a legnagyobbat, ha a két legnagyobb szám összegéből vonjuk ki a legkisebbet:

$$a+b-c \leq c+a-b \leq b+c-a.$$

A reciprokaikra természetesen éppen az ellentétes sorrend lesz igaz, hiszen mindhárom pozitív:

$$\frac{1}{b+c-a} \leq \frac{1}{c+a-b} \leq \frac{1}{a+b-c}.$$

Ezt követően már kényelmesen használható a rendezési tétel az

$$a \leq b \leq c \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{b+c-a} \leq \frac{1}{c+a-b} \leq \frac{1}{a+b-c}$$

számhármasokra. Az azonosan rendezés adja a legnagyobb lehetséges összeget:

$$a \cdot \frac{1}{b+c-a}+b \cdot \frac{1}{c+a-b}+c \cdot \frac{1}{a+b-c} \geq b \cdot \frac{1}{b+c-a}+c \cdot \frac{1}{c+a-b}+a \cdot \frac{1}{a+b-c},$$

$$a \cdot \frac{1}{b+c-a}+b \cdot \frac{1}{c+a-b}+c \cdot \frac{1}{a+b-c} \geq c \cdot \frac{1}{b+c-a}+a \cdot \frac{1}{c+a-b}+b \cdot \frac{1}{a+b-c}.$$

A két egyenlőtlenséget összeadva, majd a bal oldali összeg felét mindkét oldalból kivonva pontosan a bizonyítandó állítás adódik:

$$\frac{2a}{b+c-a}+\frac{2b}{c+a-b}+\frac{2c}{a+b-c} \geq \frac{b+c}{b+c-a}+\frac{c+a}{c+a-b}+\frac{a+b}{a+b-c},$$

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{b+c-a}{b+c-a}+\frac{c+a-b}{c+a-b}+\frac{a+b-c}{a+b-c}=3.$$

Megjegyzés: Az egyenlőség fennállássának feltételét a versenyzők nem vizsgálták, nem szerepelt a feladat szövegében. Azt azonnal láthatjuk, hogy $a=b=c$ esetén teljesül a pontos egyenlőség. Van-e más ilyen helyzet? Ha két pár cseréjénél egyenlőség van, akkor pl. $a=b$ vagy $\frac{1}{b+c-a}=\frac{1}{c+a-b}$. Mindkettőből az következik, hogy $a=b$. Ez bármely másik pár esetén is igaz, így egyenlőség valóban csak abban az esetben lehet, ha a,b és c egyenlők.

II. Megoldás. *(Nguyen Le Quynh-Mai és Xiong Benjamin Victor megoldása)*

A háromszög-egyenlőtlenségek miatt $a+b-c, c+a-b$ és $b+c-a$ pozitív számok. vezessünk be ezek helyett új betűket, majd azokkal fejezzük ki a,b,c-t.

$$x:=a+b-c,\quad y:=c+a-b,\quad z:=b+c-a.$$

Kettő-kettő összegét felezve kapjuk, hogy

$$a=\frac{y+z}{2},\quad b=\frac{x+z}{2},\quad c=\frac{x+y}{2}.$$

Új betűinkkel a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala:

$$\frac{\frac{y+z}{2}}{x}+\frac{\frac{x+z}{2}}{y}+\frac{\frac{x+y}{2}}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right).$$

A törteket csoportosíthatjuk úgy, hogy azonnal látható legyen, itt három szám és recirokának összege szerepel. ezek egyenként nagyobb vagy egyenlőek, mint 2:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3.$$

Ebben a megoldásban azonnal adódik az egyenlőség egyetlen lehetséges esete is: $x=y=z$, azaz $a=b=c$.

7. feladat: Gombóc Artúr a születésnapjára összesen 100 szelet csokit kapott, négyféle ízben: 17 szelet kávés, 26 szelet kókuszos, 42 szelet mogyorós és 15 szelet marcipános. Artúr sajnos gyomorrontást kap estére, ha az alábbi események bármelyike bekövetkezik a születésnapján:

(1) Valamelyik ízű csokoládéból megette az összeset.

(2) Van két olyan íz is, amelyek mindegyikéből megette a csokik több, mint felét.

(3) Van három olyan íz is, amelyek mindegyikéből megette a csokik több, mint a harmadát.

(4) Mind a négy ízből megette a csokik több mint negyedét.

Legfeljebb hány csokit ehet meg a születésnapján Gombóc Artúr?

(6 pont)

I. Megoldás. *(Birovecz Bátor és Somlói Dominik megoldása)*

Az első feltétel alapján az egyes fajtákból megehető maximális mennyiség:

kávés: 16, kókuszos: 25, mogyorós: 41, marcipános: 14.

A további feltételek teljesülése esetén kisebb a darabszámok közötti eltérés, így elsőre mindenképpen célszerű a mogyorósat választani. Ebből 41 darabot ehet meg Gombóc Artúr.

Most tekintsük a további háromféle csokoládéra a második feltételt.

kávés: 8, kókuszos: 13, marcipános: 7.

Úgy kapjuk a maximális darabszámot, ha a kókuszosból választunk 13 darabot.

Maradtak a kávés és marcipános csokik. Az egyikből 17 szelet, a másikból 15 szelet. Mindkettőnek a harmadrésze egészre kerekítve 5 darab, tehát a negyedek alapján lehet valószínűleg jó döntést hozni. A 17 negyede egészekre kerekítve 4, míg a 15 negyedrésze egészekre kerekítve csak 3, így érdemes a negyedekre vonatkozó feltételnél a kávéssal, a harmadoknál pedig a marcipánosnál maradni.

Összefoglalva: Gombóc Artúr a gyomorrontás kockázata nélkül elfogyaszthat 41 szelet mogyorós, 13 darab kókuszos, 5 darab marcipános és 4 darab kávés csokit, ez összesen 63 darab,

II. Megoldás. *(Balázs Bálint megoldása)*

A feladat szövegéből arra lehetett következtetni, hogy csak egész szelet csokikat fogyaszthatott el mindegyik fajtából Gombóc Artúr.

A feltételek alapján akkor kaphatunk maximumot, ha

- egyik fajtából a csokik száma minusz egy darabot,
- egy másik fajtából a csokik felét,
- a harmadik fajtából a csokik harmadát, és végül
- a negyedik fajtából a csokik negyedét eszi meg.

A feltételek alapján egy táblázatot készítünk.

	negyed	harmad	fél	egész -1
kávés	4	5	8	16
kókuszos	6	8	13	25
mogyorós	10	14	21	41
marcipános	3	5	7	14

Mindegyik sorból és mindegyik oszlopból egy-egy számot választhatunk. Így azonnal adódik, hogy a 41-et, a legnagyobb számot érdemes először kiválasztani. Ezután a harmadik sor és a negyedik oszlop már „tiltott”. A megmaradó 3×3-asban a 13 a legnagyobb a szám. Ez kiiktatja a további vizsgálatból a harmadik oszlopot és a második sort. Maradt a 2×2-es, két sorból és oszlopból álló rész. Itt pedig a $(4,5)$ pár választása előnyösebb, mint a $(3,5)$ pár választása.

A keresett maximum: $41+13+4+5=63$.

Megjegyzés: A megoldók a „mohó algoritmus” gondolatmentetét írták le. Ha meggondoljuk itt is rendezési tételről van szó: $\left[a\cdot\frac{a-1}{a}\right]+\left[b\cdot\frac{1}{2}\right]+\left[c\cdot\frac{1}{3}\right]+\left[b\cdot\frac{1}{2}\right]+\left[d\cdot\frac{1}{4}\right]$ maximumát keressük. Az egész részek vizsgálata árnyalja a képet.

8. feladat: Az a, b, c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c. \qquad \text{(8 pont)}$$

I. Megoldás. *(Csontos András és Fehér Anna megoldása)*

Azonnal látható, hogy ez a feladat is szimmetrikus, a betűk egymás közötti cserréje esetén változatlan marad. Emiatt választhatunk egy nagyság szerinti sorrendet a számok között: $a \le b \le c$. A bal oldali három törtet szétbontjuk két hármas csoportra:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}=\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\right).$$

Az első három összegére adunk alsó becslést a rendezési tétel segítségével. A választott sorrend alapján:

$$a^2 \le b^2 \le c^2 \quad \text{és} \quad a+b \le c+a \le b+c.$$

Ez utóbbiból a reciprokaikra nézve éppen fordított sorrend következik, tehát

$$a^2,\ b^2,\ c^2 \quad \text{és} \quad \frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}$$

számhármasok azonosan rendezettek. A rendezési tétel alapján így:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}.$$

Most helyettesítsük ezt az összeget a bal oldalra:

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\right) \ge$$

$$\ge \frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}=$$

$$=\frac{c^2+bc}{b+c}+\frac{a^2+ca}{c+a}+\frac{b^2+ab}{a+b}=\frac{c(b+c)}{b+c}+\frac{a(c+a)}{c+a}+\frac{b(a+b)}{a+b}=a+b+c.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha mindegyik lépésben vagy két szám négyzete, vagy két páros összeg reciroka megegyezik, azaz a számok mind egyenlők.

II. Megoldás. *(Nguyen Le Quynh-Mai megoldása)*

Először rendezzük nullára az egyenlőtlenség jobboldalát:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b+\frac{c^2+ab}{a+b}-c \ge 0.$$

A közös nevezőre hozások után mindegyik számláló külön-külön szorzattá is alakítható:

$$\frac{a^2+bc-ab-ca}{b+c}+\frac{b^2+ca-bc-ab}{c+a}+\frac{c^2+ab-ca-bc}{a+b} \ge 0,$$

$$\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-c)(b-a)}{c+a}+\frac{(c-a)(c-b)}{a+b} \ge 0.$$

A következő lépésben a három törtet közös nevezőre hozzuk:

$$\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-c^2)(b^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 0.$$

A nevező pozitív, elegendő belátni, hogy a számláló nemnegatív. Végezzük el a szorzásokat a számlálóban és vonjuk össze az egynemű tagokat:

$$a^4-a^2b^2-c^2a^2+b^2c^2+b^4-b^2c^2-a^2b2+c^2a^2+c^4-b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2=$$

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=\frac{1}{2}[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2].$$

Ez pedig három teljes négyzet összege, legalább nulla. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a=b=c$.

9. feladat: Három nemnegatív valós szám a, b és c összege 1. Mutassuk meg, hogy

$$7(ab+bc+ca)\leq 2+9abc. \qquad \text{(10 pont)}$$

Megoldás. *(Kotán Tamás és Nguyen Le Quynh-Mai megoldása alapján)*

A három szám összege $a+b+c=1$, így eggyel vagy ennek hatványaival szorozva elérhetjük, hogy homogén legyen az egyenlőtlenség. Ez azt jelenti, hogy a $9abc$ harmadfokú taghoz igazítjuk az összes többit, anélkül, hogy valójában megváltoztatnánk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

$$7(ab+bc+ca)\leq 2+9abc,$$

$$7(ab+bc+ca)(a+b+c)\leq 2(a+b+c)^3+9abc.$$

Elvégezzük a műveleteket:

$$7a^2b+7ab^2+7b^2c+7bc^2+7c^2a+7ca^2+21abc\leq$$

$$\leq 2a^3+2b^3+2c^3+6a^2b+6ab^2+6b^2c+6bc^2+6c^2a+6ca^2+12abc+9abc$$

és a lehetséges összevonásokat:

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\leq 2a^3+2b^3+2c^3.$$

Nguyen Le Quynh-Mai megoldásának befejezése:

Most alkalmazzuk kétszer is a rendezési tételt a biztosan azonosan rendezett

$$a,\ b,\ c \qquad \text{és} \qquad a^2,\ b^2, c^2$$

számhármasokra:

$$a\cdot a^2+b\cdot b^2+c\cdot c^2\geq a\cdot b^2+b\cdot c^2+c\cdot a^2,$$
$$a\cdot a^2+b\cdot b^2+c\cdot c^2\geq a\cdot c^2+b\cdot a^2+c\cdot b^2.$$

A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. Egyenlőség mindegyik csere esetében akkor és csak akkor lehetséges, ha vagy két szám, vagy két szám négyzete megegyezik, vagyis végül mindhárom szám egyenlő.

Kotán Tamás megoldásának befejezése:

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\leq 2a^3+2b^3+2c^3.$$

Adjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalához a $a^3+b^3+c^3$ polinomot.

$$a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\leq 3a^3+3b^3+3c^3.$$

A bal oldal szorzattá alakítható, majd érdemes 9-cel el is osztani mindkét oldalt:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\leq 3(a^3+b^3+c^3),$$

$$\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\le\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

Ez pedig az a, b, c és a^2, b^2, c^2 számhármasokra a korábban bizonyított Csebisev-egyenlőtlenség.

10. feladat: Legyenek x_1, x_2, …, x_n különböző pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{x_1^2}{1^2}+\frac{x_2^2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{n^2}\ge\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}. \qquad (10 \text{ pont})$$

Megoldás. *(Gurzó József megoldása alapján)*

Tekintsük az $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ és $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}$ szám n-eseket. A rendezési tétel szerint tudjuk, hogy az ezekből képzett összeg akkor lesz minimális, ha ellentétesen rendezettek. A második sorozat szigorúan monoton csökkenő, tehát az elsőnek monoton növekedőnek kell lennie. A feladat feltétele szerint az x_i számok különböző pozitív egészek, így a $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ sorozat az ellentétes rendezés esetén szigorúan monoton növekedő lesz. Úgy kapjuk ekkor a legkisebb összeget, ha az x_i számok helyére rendre az $1, 2, \ldots, n$ számokat írjuk. A legkisebb lehetséges összeg tehát:

$$1^2\cdot\frac{1}{1^2}+2^2\cdot\frac{1}{2^2}+3^2\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+n^2\cdot\frac{1}{n^2}=n.$$

Egyenlőség $n=1$ és $x_1=1$ esetén.

Megjegyzés: Egy kitevő elírása miatt nem az eredeti olimpiai feladatot, hanem egy jóval könnyebb feladatot kellett a versenyzőknek megoldani. A nehezebb – olimpiai – feladatban a bal oldali nevezőkben a kitevő ugyanis 3, a megoldás nem változik, viszont szigorúan egyenlőség akkor teljesül, ha $x_i=i$. Meglepő, hogy az egy lépéses megoldás ellenére a versenyzők számára mégis nehéznek bizonyult ez a feladat.

11. feladat: Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\ge 1. \qquad (6 \text{ pont})$$

I. Megoldás. *(Meggyes Kata megoldása alapján)*

Először bővítjük a törteket a számlálójukkal, majd alsó becslést adunk a Titu-lemma segítségével:

$$\frac{a^2}{2ab+ca}+\frac{b^2}{2bc+ab}+\frac{c^2}{2ca+bc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3ab+3bc+3ca}.$$

Ezek után azt kell bizonyítani, hogy

$$\frac{(a+b+c)^2}{3ab+3bc+3ca}\ge 1,$$

vagy némi rendezéssel:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ge 3ab+3bc+3ca,$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Ha most 2-vel szorzunk, akkor három teljes négyzetet tudunk kialakítani, amely az egyenlőség lehetőségét is megmutatja:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Ez minden valós szám esetén igaz és egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a=b=c$.

II. Megoldás. *(Nguyen Le Quynh-Mai megoldása)*

Az egyes nevezők helyett vezessünk be új ismeretleneket, majd ezekkel fejezzük ki a számlálókat. Legyen

$$x=2b+c, \quad y=2c+a, \quad z=2a+b.$$

Fejezzük ki az a, b, c számlálókat is ezekkel az új ismeretlenekkel. Tulajdonképpen megkeressük a háromismeretlenes, paraméteres, lineáris egyenletrendszer megoldásait.

$$\frac{4z+y-2x}{9}=\frac{8a+4b+2c+a-4b-2c}{9}=a,$$

továbbá a betűk ciklikus cseréjével:

$$b=\frac{4x+z-2y}{9}, \quad c=\frac{4y+x-2z}{9}.$$

Most az eddigiekkel írjuk más alakba a bizonyítandó egyenlőtlenség törtjeit:

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}=\frac{1}{9}\left(\frac{4z+y-2x}{x}+\frac{4x+z-2y}{y}+\frac{4y+x-2z}{z}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left[4\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}-6\right]=$$

$$\frac{1}{9}\left[3\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)-6\right] \geq \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Felhasználtuk, hogy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2. A most kapott ,,átlagot” a mértani középpel tudjuk alulról becsülni:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}}=1.$$

A bizonyításhoz még hozzá tudjuk tenni, hogy egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x=y=z$, azaz $a=b=c$.

12. feladat: Oldja meg az egyenletet a valós számok lehetséges legbővebb részhalmazán:

$$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}. \qquad \text{(6 pont)}$$

Megoldás. *(Balázs Bálint és Fehér Anna megoldása alapján)*

Azonnal látható, hogy a gyökvonások mindegyike csak abban az esetben végezhető el, ha $x \geq 1$. Vegyük ezek után az egyenlet négyzetre emelt alakját és a könnyebb áttekinthetőség érdekében legyen

$$a_1=2,\ a_2=x,, \quad \text{továbbá} \quad b_1=\sqrt{x-1},\ b_2=5.$$

Ezek beírásával a megoldandó egyenlet:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Látható hogy ez éppen a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenségnek az a speciális esete, amikor az egyenlőség is teljesül. Ennek feltételét az elméleti összefoglalóban is tárgyaltuk: $b_1 = \lambda \cdot a_1$ és $b_2 = \lambda \cdot a_2$. (Az $x \geq 1$ feltétel alapján tudjuk, hogy λ pozitív szám.) Most küszöböljük ki a λ szorzót.

$$\sqrt{x-1} = 2\lambda \implies x = 4\lambda^2 + 1.$$

Betéve a másodikba:

$$5 = \lambda(4\lambda^2 + 1) \implies 4\lambda^3 + \lambda - 5 = 0.$$

A $\lambda = 1$ megoldás itt azonnal adódik. A $(\lambda - 1)$ gyöktényező kiemelése után

$$4\lambda^3 + \lambda - 5 = (\lambda - 1)(4\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, az egyenletnek csak $\lambda = 1$ a valós gyöke. Ebből kapjuk az eredeti egyenlet egyetlen valós megoldását az $x = 5$-öt. Behelyettesítéssel is ellenőrízhető, hogy ez valóban megoldás.

13. feladat: Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{ab + bc + ca}{a^3 + b^3 + c^3} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \qquad \text{(8 pont)}$$

I. Megoldás. *(Csontos András megoldása)*

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenséget (CBS) fogjuk alkalmazni. Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $3(a^3 + b^3 + c^3)$ polinommal. Ezzel a bizonyítandó:

$$3(ab + bc + ca) \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a^3 + b^3 + c^3).$$

A jobb oldali összegre a CBS-egyenlőtlenséggel tudunk alsó becslést adni. Legyenek

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{b}},\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \text{továbbá} \quad y_1 = \sqrt{a^3},\ y_2 = \sqrt{b^3},\ y_3 = \sqrt{c^3}.$$

A CBS-egyenlőtlenségbe helyettesítve ezeket:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{a^3} + \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{b^3} + \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{c^3}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a^3 + b^3 + c^3),$$

$$(a + b + c)^2 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a^3 + b^3 + c^3).$$

A befejezéshez elegendő belátni, hogy

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2.$$

Ez pedig – ebben az anyagban is többször tárgyaltuk – ekvivalens a

$$0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

igaz egyenlőtlenséggel. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$.

II. Megoldás. *(Kotán Tamás és Somlói Dominik megoldása)*
Hozzuk közös nevezőre az egyenlőtlenség jobb oldalán található törteket:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3} \leq \frac{ab+bc+ca}{3abc}.$$

Egyszerűsítés után vesszük mindkét oldal reciprokát, az egyenlőtlenség iránya megfordul, azt kell bizonyítanunk, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Mindkét oldalt 3-mal osztva ez éppen az a^3, b^3, c^3 számok számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenség, tehát valóban igaz. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a számok mind egyenlők.

III. Megoldás. *(Fehér Anna megoldása alapján)*
A kezdeti lépések után ismét azt bizonyítjuk, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Elosztjuk mindkét oldalt a pozitív abc-vel:

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 3.$$

A bal oldalon a számlálóban négyzetek szerepelnek, így adódik a Titu-lemma alkalmazhatósága:

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3.$$

Ezt beszorozva és rendezve ismét a sokszor tárgyalt

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

illetve ezzel ekvivalens és igaz

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

befejezést kapjuk.

14. feladat: Mutassuk meg, hogy ha a, b, $c \in]0,1[$, akkor

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1. \qquad \text{(10 pont)}$$

I. Megoldás. *(Balázs Bálint és Csontos András megoldása)*
Négyzetre emelés után alkalmazzuk a CBS-egysenlőtlenséget a bal oldal felső becslésére:

$$(\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)})^2 < 1$$

az állítás új alakja.

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{bc}+\sqrt{(1-a)}\sqrt{(1-b)(1-c)}\right)^2 \leq (a+1-a)(bc+(1-b)(1-c) < 1.$$

Rendezés után azt kell igazolni, hogy

$$2bc < b+c.$$

A b és c 0 és 1 közötti pozitív számok, emiatt $b^2 < b$, valamint $c^2 < c$. Ezeket felhasználva elegendő megmutatni, hogy

$$2bc \leq b^2+c^2,$$

viszont ez éppen $(b-c)^2 \geq 0$ átrendezett alakja.

II. Megoldás. *(Kotán Tamás megoldása)* Az 1-nél kisebb pozitív számok négyzetgyöke kisebb, mint a harmadik gyökük. ($x < 1$, $x^3 < x^2$, $\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3} < \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$). Írjunk a bizonyítandó egyenlőtlenségben a négyzetgyökök helyett köbgyököket. Ezzel egy erősebb állítást kapunk, amely viszont a számtani-mértani közép segítségével közvetlenül bizonyítható:

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq$$

$$\leq \frac{a+b+c}{3}+\frac{1-a+1-b+1-c}{3} = 1.$$

III. Megoldás. *(Nguyen Le Quynh-Mai megoldása)*

Tudjuk, hogy $\sqrt{c}$ és $\sqrt{1-c}$ is nulla és egy közé eső számok. Emiatt a bal oldali összeg növekszik, ha ezt a két tényezőt elhagyjuk. Ezt követően már számtani-mértani középpel becsülhető az összeg.

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt{ab}+\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq \frac{a+b}{2}+\frac{1-a+1-b}{2} = 1.$$

15. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq a+b+c \qquad \text{(10 pont)}$$

I. Megoldás.

Akármilyen nagyságúak egymáshoz képest az a^3, b^3, c^3 pozitív számok, az egészen biztos, hogy az

$$a^3,\ \ b^3,\ \ c^3 \text{ és } \frac{1}{a^2},\ \ \frac{1}{b^2},\ \ \frac{1}{c^2}$$

számhármasok ellentétesen rendezettek. Így a legkisebb összeget, akkor kapjuk, ha ebben sorrendben vesszük a szorzatokat:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^3}{a^2}+\frac{b^3}{b^2}+\frac{c^3}{c^2} = a+b+c.$$

A rendezési tétel alapján az is látható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha mindegyik ,,cserénél" vagy két szám köbe, vagy két szám reciprokának négyzete megegyezik, azaz a számok mind egyenlők.

Megjegyzés: Itt mindegyik beküldött megoldás hiányos volt. A versenyzők nem vették figyelembe, hogy az egyenlőtlenség bal oldala nem szimmetrikus az a, b, c-re nézve. Emiatt nem lehet egy nagyság szerinti sorrendet önkényesen megválasztani. A ciklikus szimmetria viszont teljesül, tehát elegendő lett volna az $a \leq b \leq c$ és $a \leq c \leq b$.

II. Megoldás.

Vegyük az $\frac{a^3}{b^2}, b, b$ pozitív számok közötti számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{a^3}{b^2} + b + b}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} \cdot b \cdot b} = a.$$

Szorozzuk mindkét oldalt 3-mal.

$$\frac{a^3}{b^2} + b + b \geq 3a,$$

majd írjuk fel a másik két törtre is ugyenezt az igaz egyenlőtlenséget:

$$\frac{b^3}{c^2} + c + c \geq 3b,$$

$$\frac{c^3}{a^2} + a + a \geq 3c.$$

A három egyenlőtlenséget összeadjuk.

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 2b + 2c + 2a \geq 3a + 3b + 3c.$$

Végül mindkét oldalból vonjunk ki $2(a + b + c)$-t, ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c.$$

Megjegyzés: Ezt a módszert Csete Lajos győri kolléga több ismert egyenlőtlenség bizonyítására is felhasználta és ,,komáromi trükk"-nek nevezte el.

III. Megoldás.

Alkalmazzunk egy számtani-mértani egyenlőtlenséget 9 darab $\frac{a^3}{b^2}$, 6 darab $\frac{b^3}{c^2}$ és 4 darab $\frac{c^3}{a^2}$-re

$$\frac{9 \cdot \frac{a^3}{a^2} + 6 \cdot \frac{b^3}{c^2} + 4 \cdot \frac{c^3}{a^2}}{19} \geq \sqrt[19]{\left(\frac{a^3}{a^2}\right)^9 \left(\frac{b^3}{c^2}\right)^6 \left(\frac{v^3}{a^2}\right)^4} = a$$

Ciklikusan a többire is felírva kapjuk, hogy

$$\frac{4 \cdot \frac{a^3}{a^2} + 9 \cdot \frac{b^3}{c^2} + 6 \cdot \frac{c^3}{a^2}}{19} \geq b$$

és

$$\frac{6 \cdot \dfrac{a^3}{a^2} + 4 \cdot \dfrac{b^3}{c^2} + 9 \cdot \dfrac{c^3}{a^2}}{19} \geq c$$

majd ezeket összeadva

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c.$$

kapjuk a bizonyítandó állítást.