Kardos-Montágh Matematikaverseny
2021.
I. forduló

Számtani-, mértani-, harmonikus- és négyzetes közép

1.1. Elméleti összefoglaló

Definiáljuk először a címben szereplő nevezetes közepeket.

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n \quad (n \geq 2)$ pozitív valós számok.
Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok
- számtani (vagy aritmetikai) közepének nevezzük és A_n-nel jelöljük az

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

- mértani (vagy geometriai) közepének nevezzük és G_n-nel jelöljük a

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

- harmonikus közepének nevezzük és H_n-nel jelöljük a

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

- négyzetes (vagy kvadratikus) közepének nevezzük és Q_n-nel jelöljük a

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

pozitív valós számot.

Egyszerű becsléssel megállapítható, hogy ezek valóban „közepek", minden esetben mindegyik a legkisebb és a legnagyobb szám közé esik.

Most néhány alapvető tétel kimondása és bizonyítása következik.

I. tétel: *Ha a tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n \quad (n \geq 2)$ pozitív számokhoz hozzávesszük $(n+1)$-ediknek ezeknek a számoknak az A_n aritmetikai közepét, akkor az így kapott $(n+1)$ darab szám artimetrikai közepe változatlan marad.*

Bizonyítás:

Definíció szerint $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, azaz $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \cdot A_n$. Tekintsük az A_{n+1}-et.

$$A_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_n, A_n) = \frac{1}{n+1}((a_1, a_2, \ldots, a_n, A_n) = \frac{1}{n+1}(nA_n + A_n) = \frac{n+1}{n+1}A_n = A_n.$$

II. tétel: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n \quad (n \geq 2)$ pozitív számok geometriai közepe nem nagyobb, mint e számok aritmetikai közepe. A két közép akkor és csak akkor egyezik meg, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. A jelölésekkel: $G_n \leq A_n$.*

Bizonyítás: A Cauchy-féle teljes indukciós eljárást követjük.

a) $n = 2$-re a $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ egyenlőtlenség teljesülése ekvivalens a négyzetreemeléssel és rendezéssel kapott $0 \leq (a_1 - a_2)^2$ mindig igaz egyenlőtlenséggel és az is látható hogy $A_2 = G_2$ akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2$.

b) Most azt igazoljuk, hogy $G_n \le A_n$ esetén $G_{2n} \le A_{2n}$ is fennáll tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ esetén.

$$G_{2n} = \sqrt[2n]{(a_1a_2\ldots a_n)(a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{2n})} = \sqrt[2n]{a_1a_2\ldots a_n} \cdot \sqrt[2n]{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{2n}} =$$

$$\sqrt{G_n(a_1a_2\ldots a_n)} \cdot \sqrt{G_n(a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{2n})},$$

ezért az indukciós feltevés szerint:

$$G_{2n} \le \sqrt{A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \cdot \sqrt{A_n(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n})},$$

ahonnan az

$$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{és} \qquad A_n(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n})$$

számokra alkalmazva az *a)* pontban bizonyított egyenlőtlenséget:

$$G_{2n} \le \sqrt{A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \cdot \sqrt{A_n(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n})}, \le$$

$$\le \frac{A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) + A_n(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n})}{2} = \frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots a_{2n}}{n}}{2} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n} = A_{2n}.$$

Ezzel a *b)* pont állítását igazoltuk.

c) Eddig igazoltuk a $G_n \le A_n$ relációt azokban az esetekben, mikor n 2-hatvány. Tegyük fel, hogy $2^k < n < 2^{k+1}$, azaz n nem 2-hatvány. Ekkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemeket egészítsük ki 2^{k+1} számú elemmé az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemekhez hozzávéve az $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{2^{k+1}} = A_n(a_1, a_2, \ldots a_n) = A_n$ elemekkel. A *b)* pontban bizonyítottak alapján a 2^{k+1} darab számra már ismert, hogy $G_{2^{k+1}} \le A_{2^{k+1}}$. Részletesen:

$$\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\ldots a_n \underbrace{A_nA_n\ldots A_n}_{(2^{k+1}-n)\text{darab}}} = \sqrt[2^{k+1}]{G_nA_n^{2^{k+1}-n}} \le$$

$$\le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (2^{k+1} - n)A_n}{2^{k+1}} = \frac{nA_n + (2^{k+1} - n)A_n}{2^{k+1}} = A_n.$$

A befejezéshez az első és utolsó kifejezés összehasonlítása alapján:

$$\sqrt[2^{k+1}]{G_n^nA_n^{(2^{k+1}-n)}} \le A_n,$$

Mindkét oldalt hatványozva és rendezve:

$$G_n^nA_n^{(2^{k+1}-n)} \le A_n^{(2^{k+1})},$$

$$G_n \le \frac{A_n^{(2^{k+1})}}{A_n^{(2^{k+1}-n)}} = A_n.$$

d) Ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, akkor a $G_n = A_n$ nyilvánvalóan teljesül.

A tételben szereplő állítás igazolásához elegendő belátni, hogy ha legalább egy elem a többi közül valamelyiktől eltér, akkor $G_n < A_n$. Feltehetjük, hogy ilyen elempár például az a_1 és a_2 számok. Tegyük fel indirekt, hogy $a_1 \neq a_2$, és mégis $G_n = A_n$. Az indirekt feltevésben szereplő

$$\sqrt[n]{(a_1a_2)a_3a_4\ldots a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

egyenlőség átírható a következő alakra:

$$\sqrt[n]{\sqrt{a_1a_2}^2 a_3a_4\ldots a_n} = \frac{2\frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Most felhasználva, hogy $a_1 \neq a_2$ esetén $\sqrt{a_1a_2} < \frac{a_1+a_2}{2}$:

$$G_n = \sqrt[n]{\sqrt{a_1a_2}^2 a_3a_4\ldots a_n} < \sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3\ldots a_n} =$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) a_3\ldots a_n} \leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} = A_n$$

a bizonyított tétel alapján.

Ellentmondásra jutottunk, tehát nem lehet két eltérő nagyságú szám.

III. tétel: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ pozitív számok harmonikus közepe nem nagyobb, mint e számok geometriai közepe. A két közép akkor és csak akkor egyezik meg, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. A jelölésekkel: $H_n \leq G_n$.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk a geometriai és számtani középre vonatkozó tételt a szintén poztitív $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_n}$ számokra.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Pozitív számok reciprokait véve az egyenlőtlenség iránya megfordul és éppen a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Szintén az előbbi tétel alapján egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_j}$, minden i, j párra, azaz $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

IV. tétel: *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ pozitív számok aritmetikai közepe nem nagyobb, mint e számok kvadratikus közepe. A két közép akkor és csak akkor egyezik meg, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. A jelölésekkel: $A_n \leq Q_n$.*

Bizonyítás: A bizonyítást ismét teljes indukcióval végezzük. Legyen először $n = 2$. Induljunk ki az azonosan igaz $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből:

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0,$$

$$2a_1^2 + 2a_2^2 \geq a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2,$$

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{4},$$
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2$.

Tegyük fel $n = k$-ra, hogy $A_k \leq Q_k$ a tetszőleges pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számokra. $n = k + 1$-re úgy fogunk igazolni, hogy kiindulunk az

$$(a_{k+1} - a_i)^2 \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

azonos egyenlőtlenségek

$$2a_{k+1}a_i \leq a_{k+1}^2 + a_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

alakjából. Összegezve ezt a k darab egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{k} 2a_{k+1}a_i \leq k \cdot a_{k+1}^2 + \sum_{i=1}^{k} a_i^2,$$

$$2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \leq k \cdot a_{k+1}^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2).$$

Adjuk mindkét oldalhoz az $a_{k+1}^2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2$ összeget:

$$a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1})^2 \leq$$
$$\leq (k + 1) \cdot a_{k+1}^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2}{k},$$

azaz

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 \leq k(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2),$$

ennek alapján pedig

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1})^2 \leq$$
$$\leq (k + 1) \cdot a_{k+1}^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 \leq$$
$$\leq (k + 1)a_{k+1}^2 + (k + 1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2).$$

Két lépésben beláttuk, hogy

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1})^2 \leq (k + 1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2).$$

Végül $(k + 1)^2$-nel osztva és négyzetgyököt vonva éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1})^2}{(k + 1)^2} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2}{k + 1},$$

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k + 1} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2}{k + 1}} = Q_{k+1}.$$

Meg kell még itt is mutatni, hogy egyenlőség csak az $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ esetben lehet. Ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, akkor nyilvánvaló, hogy $A_n = Q_n$, mert

$$A_n = \frac{na}{n} = a, \qquad Q_n = \sqrt{\frac{n \cdot a^2}{n}} = a.$$

Ha viszont például $a_1 \neq a_2$, akkor az $\frac{a_1+a_2}{2} < \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}$ egyenlőtlenség felhasználásával:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{2\frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} <$$

$$< \frac{\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} + \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{\frac{a_1^2+a_2^2}{2} + \frac{a_1^2+a_2^2}{2} + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = Q_n.$$

Megjegyzések:

1. A közepek közötti kapcsolatok bizonyítására több nagyon eltérő módszer ismeretes. Itt nem a legrövidebbet, hanem a legkevesebb előismeretet igénylőt igyekeztünk vázolni.

2. Az egyenlőtlenségek témaköre több további, ugyanilyen fontosságú tételt tartalmaz, ezekre a későbbi fordulók összefoglalóiban térünk ki.

3. A fenti összefoglaló *Bartha Gábor–Kun Péter: Válogatott fejezetek a matematikából* c. szakköri füzete alapján készült.

Az első forduló feladatai

Már az első forduló feladatainak kitűzésekor fontos megjegyezni, hogy a sikeres szerepléshez nem kell az összes feladatot megoldani. Az eredményeket az összes forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Az alábbi feladatok többségét nem csak a nevezetes közepek segítségével lehet megoldani. A versenyben természetesen minden helyes megoldást maximális pontszámmal értékelünk.

Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfelejbb 50 %-a adható.

1. Legyenek a, b és c olyan pozitív számok, amelyekre $abc = 1$. Igazoljuk, hogy
$$ab + bc + ca \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}. \qquad \text{(6 pont)}$$

2. Az a, b, c, d tetszőleges pozitív számok esetén mutassuk meg, hogy
$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1) \geq 81abcd. \qquad \text{(6 pont)}$$
Mely a, b, c, d számok esetén teljesül az egyenlőség?

3. Legyenek a, b, c és d pozitív valós számok. Bizonyítsuk a következő egyenlőtlenséget:
$$16(abc + abd + acd + bcd) \leq (a + b + c + d)^3. \qquad \text{(8 pont)}$$

4. Legyenek a, b és c pozitív számok. Mutassuk meg, hogy
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2. \qquad \text{(10 pont)}$$

5. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyeknek összege 3. Mutassuk meg, hogy
$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}. \qquad \text{(10 pont)}$$

Beküldési határidő: 2021. március 8. 23^{59}
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: I. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, ha lehet PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalnaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
nagyistvan_fordulo1.pdf
kisspista_fordulo1_feladat01.pdf