Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
5. osztály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: A hét törpe közül négy - Szundi, Kuka, Morgó és Hapci - hétfőtől vasárnapig az erdőben töltötték az éjszakáikat. Véletlenül azonban csak 3 párnát vittek magukkal. Hétfő este Szundi párna nélkül hajtotta álomra a fejét. Mivel azonban sokáig nem tudott elaludni, elhatározta, hogy valakitől elcseni a párnáját. Így kedd reggel valaki párna nélkül ébredt. Ezek után minden este a következő történt: az a törpe, aki párna nélkül feküdt le aludni, valakitől az éj leple alatt elvette a párnáját. Nappal minden törpe nagyon vigyázott az éppen nála levő párnára, nehogy egy másik törpe elvegye. Vasárnap délután hazaérkeztek és a következőket mesélték Hófehérkének:

- Mindannyian ugyanannyi reggel ébredtünk párna nélkül, kivéve Szundit, akinek minden reggel volt párna a feje alatt. - mesélte Morgó.

- Én péntek és vasárnap reggel ébredtem párna nélkül. - panaszolta Kuka.

- Én szombat reggel szerencsére párnával ébredtem. - jegyezte meg elégedetten Hapci.

A szerda reggeli ébredéskor kinek nem volt párna a feje alatt, ha a négy törpe igazat mondott? *(8 pont)*

1. feladat megoldás: Összesen 6 reggel ébredtek az erdőben a törpék. *(1 pont)**

Minden törpe, Szundi kivételével 2-2 reggel ébredt párna nélkül. *(1 pont)*

A feladat szövegéből következik, hogy senki sem ébredt két egymás utáni reggel párna nélkül. *(2 pont)*

Szombaton csak Morgó ébredhetett párna nélkül (mivel Hapci nem), ezért az alábbi táblázatot kell úgy befejezni, hogy nem lehet közvetlenül egymás után ugyanaz a név:

Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
?	?	?	Kuka	Morgó	Kuka

Ez pedig csak úgy lehetséges, ha kedden és csütörtökön Hapci ébredt párna nélkül. *(2 pont)*

Tehát szerdán Morgó feje alatt nem volt párna. *(2 pont)*

* *Ezt a pontot akkor is kapja meg a versenyző, ha a megoldásából egyértelműen kiderül, hogy 6 reggellel számolt.*

Megjegyzés: *Ha a versenyző további indoklás nélkül csak egy jó táblázatot mellékel, valamint megállapítja, hogy szerdán Morgó ébredt párna nélkül, akkor 3 pontot kapjon.*

2. feladat: Gondoltam egy négyjegyű számra, melynek számjegyei mind páratlanok. Ha az utolsó számjegyet elhagyjuk, akkor egy olyan háromjegyű számot kapunk, mely 222-vel nagyobb, mintha az eredeti négyjegyű szám első számjegyét hagynánk el. Melyik négyjegyű számra gondolhattam? Az összes lehetséges megoldást add meg!

(8 pont)

2. feladat megoldás: Legyen a négyjegyű szám $\overline{ABCD}$. Írásbeli kivonásként felírva a műveletet:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ - & B & C & D \\ \hline & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

ahol az azonos betűk helyére azonos számokat kell írni. *(Ha ez a gondolat nem betűkkel, de egyértelműen megjelenik a versenyző megoldásában, akkor ezt a két pontot kapja meg.)*

(2 pont)

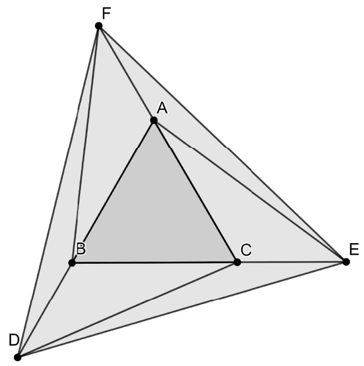
Mivel az összes számjegy páratlan, ezért sehol nem lehet tízes vagy százas átvitel (vagyis nem állhat egyik helyiértéken sem kisebb szám felül, mint alul), mert akkor a következő helyiértéken a különbség nem lehetne páros. *(2 pont)*

Így tehát $D < C < B < A$, és páratlan számok, melyek különbsége 2. Erre két megoldás található: $D = 1,\ C = 3,\ B = 5,\ A = 7$, vagy $D = 3,\ C = 5,\ B = 7,\ A = 9$. *(2 pont)*

Vagyis az eredeti négyjegyű szám lehetett 9753 vagy 7531. *(2 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

3. feladat: Zsófi az ABC háromszög oldalait egyik irányba meghosszabbítva, majd ugyanazt a távolságot felmérve megkapta a D,E és F pontokat. Ezeket összekötötte egymással, illetve a C, A, és B pontokkal az ábrán látható módon. Ezután minden, az ábrán látható háromszöget különböző színnel rajzolt körül. Hány színre volt szüksége?



(8 pont)

3. feladat megoldás: Az ABC háromszög 1 db háromszög. *(1 pont)*

Ezután az ADC, BDC, CDE és BDE és ADE háromszögeknek mind van egy-egy megfelelője AC, illetve BA oldal "irányába" is, ez összesen $5 \cdot 3$ háromszög. *(5 pont)*

A DEF háromszög is még egy háromszög. *(1 pont)*

Ekkor mindegyik háromszöget pontosan egyszer megszámoltuk. Tehát összesen $1+15+1 = 17$ háromszög van az ábrán. *(1 pont)*

Megjegyzések: *Ha a versenyző különböző színekkel jól láthatóan berajzolja a háromszögeket, és utána az ábrájáról jól megszámolja, hogy hány háromszöget lát, akkor maximális pontszámot kapjon.*

Ha a versenyző bármilyen más szempont szerint rendezve felsorolja az összes háromszöget, a csúcsaikkal megadva, akkor is kapja meg a maximális pontszámot.

Ha a versenyző a megoldásban leírt gondolatmenettel számol, de az ADC vagy az BDC típusú háromszögeket kétszer számolja, akkor 2-2 pont levonásban részesüljön.

Ha a versenyző kézzel próbálja megszámolni az összes háromszöget az ábrán, de bizonyosakat kihagy, akkor a második item 5 pontjából annyi pontot kell levonni, ahány háromszöget kihagy. Ha 5, vagy annál több háromszöget hagy ki, erre a részre nem kap pontot, de ha emellett az ABC és DEF háromszögeket megtalálja, valamint az általa megtalált háromszögek számát helyesen megállapítja, akkor 3 pontot kaphat.

4. feladat: Hét veszélyes sárkány összetalálkozott hét bátor lovaggal. A hét sárkánynak összesen hetven feje volt. Nagy küzdelmet vívtak, minden lovag egy-egy sárkánnyal. A hét lovag mind különböző számú és mindegyikük páros sok sárkányfejet vágott le a harc során. Lehetséges, hogy valaki egyetlen egyet se. Összesen negyvenkét fejet vágtak le a lovagok, ezután minden sárkánynak ugyanannyi feje maradt. Hány feje lehetett a sárkányoknak külön-külön, mielőtt még összetalálkoztak a lovagokkal? *(8 pont)*

4. feladat megoldás: Mivel összesen 70 fejük volt a sárkányoknak, és 42 fejet vágtak le a lovagok, így 28 fejük maradt összesen. Mivel minden sárkánynak ugyanannyi feje maradt, így egy-egy sárkánynak 4 feje maradt. *(2 pont)*

Vizsgáljuk a levágott fejek számát. Hét különböző páros számot keresünk, melyeknek az összege 42. A hét legkisebb páros szám: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12. Ezeknek az összege éppen 42. *(2 pont)*

Más megoldás nincs, mert bármelyik páros számot kicseréljük egy nagyobbra, az összeg növekedni fog. *(2 pont)*

Tehát a sárkányok fejeinek száma eredetileg: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ezek összege pedig tényleg 70. *(2 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

5. feladat: Dénes a következőt mondta:

– Ha a születési évem számához hozzáadjuk az évszám számjegyeinek az összegét, akkor éppen 2023-at kapunk.

Melyik évben születhetett Dénes? Az összes lehetséges megoldást add meg! *(8 pont)*

5. feladat megoldás: A keresett szám nem lehet 2020-nál nagyobb, mert $2020 + 2 + 0 + 2 + 0 = 2024$, és ez az összeg csak növekedne, ha a 2020-at növelnénk. *(1 pont)*

Ha a szám $201x$ alakú, akkor a $2010 + 2 + 0 + 1 = 2013$ összeghez még kétszer kell hozzáadni az egyesek helyén álló számjegyet, tehát az $10 : 2 = 5$ lesz. *(2 pont)*

Ha az évszám $200x$ alakú, akkor a $2000 + 2 = 2002$-höz kellene még kétszer az egyesek helyén álló számjegyet hozzáadni, így az összeg legfeljebb $2002 + 18 = 2021$ lenne, ami nem elegendő. *(2 pont)*

Ha az évszám $199x$ alakú, akkor a $1990 + 1 + 9 + 9 = 2009$ összeghez kellene még kétszer hozzáadni az egyesek helyén levő számot, ami így $(2023 - 2009) : 2 = 7$ kell, hogy legyen. *(1 pont)*

A keresett évszám nem lehet kisebb vagy egyenlő, mint 1989, mert akkor a szóban forgó összeg $1989 + 1 + 9 + 8 + 9 = 2016$-nál kisebb lesz. *(1 pont)*

Tehát Dénes születhetett 1997-ben, (így most 26 éves, ami lehetséges), vagy 2015-ben, (így most 8 éves, ami szintén lehetséges).

(1 pont)

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza