Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
7. osztály
II. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Van két sárga, két piros, két kék és két zöld kockánk. Helyezzük el ezt a nyolc kockát egy sorban olyan módon, hogy a két sárga között egy, a két piros között kettő, a két kék között három, a két zöld között pedig négy másik kocka legyen! Adjuk meg az összes megfelelő elrendezést!

(6 pont)

1. feladat megoldás: A két zöld közé négy kockát kell tennünk. (Mivel már csak háromféle szín maradt, ezért valamelyik színből kettő van.) Ezek között nem lehet két kék, mert akkor köztük nem lehet három másik kocka. Két piros csak úgy lehetne, hogy $Z\ \ P\ \ \_\ \ \_\ \ P\ \ Z$, mert a két piros között két másiknak kell állnia. A két piros közé sárgát mindenképpen kellene tennünk, mert két kék nem kerülhetne oda, de ekkor a sárgák közé nem egy kocka kerülne (vagy egy sem, vagy egynél több). Tehát a két zöld közé két pirosat sem tehetünk. Tehát a zöldek közé két sárga, egy piros és egy kék kocka kerül. *(3 pont)*

Ha a sárgák között a kék áll, akkor egyértelműen adódik az elrendezés: $ZSKSPZKP$. Vagy $PKZPSKSZ$

(2 pont)

Ha a sárgák közé a piros kerül, akkor lényegében a $ZSPSKZ$ elrendezés alakuk ki. Ebbe a piros kockát egyértelműen lehet elhelyezni (kettővel a piros előtt), viszont a kék kockát nem lehet a feltételnek megfelelően elhelyezni. Tehát ez az elrendezés sem jó. Más lehetőség pedig nincs.

(1 pont)

2. feladat: A $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$ sorozatban található-e két olyan különböző szám, amelyek különbsége osztható

a) 6-tal

b) 100-zal?

(6 pont)

2. feladat megoldás: Található két olyan különböző szám, hogy a különbségük osztható 6-tal. Pl. $2^3 - 2$

(1 pont)

Található két olyan különböző is, hogy a különbségük osztható legyen 100-zal. Két szám különbsége osztható 100-zal, ha a két szám utolsó két helyi értékén ugyanazok a számjegyek szerepelnek.

(2 pont)

Mivel ez maximum 100 különböző végződést jelent, tetszőlegesen választott száz szám után a 101-dik szám már biztosan valamelyik előző végződésű lesz (2 hatvány csak páros lehet, így még kevesebb a lehetőségek száma). Azaz a különbségük osztható 100-zal.

(3 pont)

3. feladat: Hét gyerek egy nagy csomag cukrot kapott. Amikor egymás között egyenlően elosztották, akkor két szem cukor maradt. Az osztozkodás közben egy barátjuk érkezett, erre a cukor osztását újrakezdték. Ezúttal is egyenlően kapott minden gyerek, de így négy szem cukorka maradt, és minden gyerek már 7 darabbal kevesebb szemet kapott. Hány darab cukorka volt a csomagban, és hány darabot kaptak a gyerekek végül?

(6 pont)

3. feladat 1. megoldás: Az újraosztozkodásnál a 7 gyerek mindegyike 7-tel kevesebb cukrot kap, hiszen az újonnan érkezett gyereknek is kellet cukrot adni. Így a nyolcadik gyerek ebből a 49 cukorból kapta meg a részét.

(4 pont)

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

Így az összesből 2-vel több maradt, mint eredetileg, tehát 2-vel kevesebbet kapott, azaz 47-et. *(1 pont)*
Az összes cukorka a fentiek alapján $8 * 47 + 4 = 380$ darab volt. *(1 pont)*

3. feladat 2. megoldás: Legyen az x ahány szem cukorkát eredetileg kaptak a gyerekek. *(1 pont)*
Ekkor az összes cukorka egyrészről: $7 * x + 2$. Másrészről, amikor megérkezett a nyolcadik gyerek:
$8 * (x - 7) + 4$.
Tehát
$7 * x + 2 = 8 * (x - 7) + 4$
$x = 54$

(3 pont)

Tehát a nyolc gyerek mindegyike 47 szem cukorkát kapott, az összes cukor pedig 380 szem volt. *(2 pont)*

3. feladat 3. megoldás: Az összes cukor száma 7-tel osztva 2, míg 8-cal osztva 4 maradékot ad. A legkisebb ilyen szám a 44. Ám ekkor csak egy lenne a különbség a kapott cukorkák száma között. *(2 pont)*

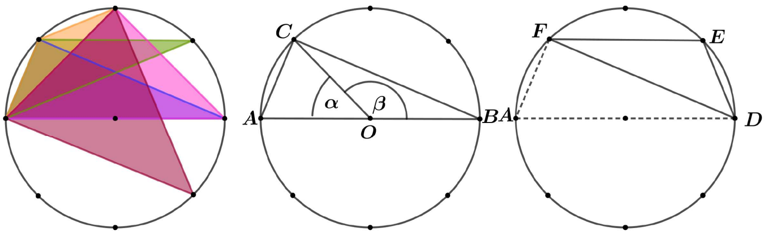
A következő lehetséges szám 56-tal nagyobb, azaz a 100, de így még mindig csak 2 a különbség. *(2 pont)*

Tehát, hogy 7 legyen a különbség, a cukorkák száma: $44 + 6 * 56 = 380$. (Vagy egyesével lépkedve.) *(1 pont)*

Így a gyerekek $(380 - 4) : 8 = 47$ szem cukorkát kaptak. *(1 pont)*

4. feladat: Egy körvonalon nyolc pont helyezkedik el, a szomszédos pontok egymástól azonos távolságra vannak. Olyan háromszöget rajzolunk, aminek mindhárom csúcsa a nyolc pont egyike, és a háromszög nem egyenlő szárú. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei? *(6 pont)*

4. feladat megoldás: A nyolc pontot felhasználva ötféle különböző háromszög készíthető, ezek közül kettő nem egyenlő szárú.



(2 pont)

Az első esetben az AOC háromszög egyenlő szárú α szárszöggel, és $\alpha = 360°/8 = 45°$. Így a háromszög alapon fekvő szögei $67,5°$-osak. Hasonlóan az OBC háromszögnél a β szög a teljes kör $\frac{3}{8}$ része, azaz $135°$, így alapon fekvő szögei $22,5°$-osak. Így az ABC háromszög szögei: $67,5°$; $22,5°$; $90°$ *(2 pont)*

A második esetben a DEF háromszöget az első ábrán látható háromszöggel egy húrtrapézzá tudjuk kiegészíteni. A húrtrapéz D-nél levő szöge $67,5°$, tehát az E-nél $112,5°$ van. A DEF háromszög D-nél levő szöge a $67,5°$ (a húrtrapéz alapon fekvő szöge) és a $22,5°$ (az ADF háromszög D-nél levő szöge) különbsége, azaz $45°$. Így a DEF háromszög harmadik szöge $22,5°$. *(2 pont)*

5. feladat: Tibi és Vili számlétrát játszanak. A 0-tól kezdve felváltva mondanak az utoljára elhangzottnál legalább 1-gyel, legfeljebb 10-zel nagyobb egész számot. A játékot az nyeri, aki a 100-at kimondja. Abban azonban megegyeznek, hogy 5-tel egyikük sem növelhet. A játék megkezdése előtt külön-külön gondolkoztak, hogyan játszanak. Tibi arra jutott, hogyha ő kezdheti a játékot, azaz ő mondhatja az első 0-nál nagyobb számot, akkor biztosan megnyeri a játékot. Igaza van-e Tibinek, van-e ilyen nyerő stratégia, ha mindketten okosak, és nyerni szeretnének?

(6 pont)

5. feladat megoldás: Igaza van Tibinek.

(1 pont)

Gondolkozzunk visszafelé. Mindenképpen ki tudja mondani Tibi a 100-at, ha kimondja a 84-et. Ha erre Vili 90-nél kevesebbet mond, akkor Tibi 95-öt válaszol. Innen biztosan nyer Tibi. Ha 90-et vagy nagyobbat mond, $84 + 10 = 94$ a legtöbb, amit mondhat Vili, akkor Tibi kimondja a 100-at.

(2 pont)

Tehát Tibi 16-onként gondolkodik visszafele. Mivel a 100 16-os osztási maradéka 4, ezért a legkisebb ilyen pozitív számról indulva, azaz a 4-ről, mindenképpen Tibi fog nyerni ügyesen. (Visszaszámolva ugyanúgy megfelelő.)

(2 pont)

Azaz a nyerő mezők a 4-től kezdve a 11. vagy a 16. mező, az ellenfél válaszától függően. Ha tudjuk, akkor a 16.-ra pótoljuk, ha nem, akkor a 11.-re. Ez mindig elérhető, hiszen $1 + 10 = 11$-et mindenképpen tudunk lépni. Kivéve ha az ellenfél 6-tal növel, de akkor meg $6 + 10 = 16$-ot tudunk lépni.

(1 pont)

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza