Vektorok vektoriális szorzata

Szakköri feladatok 11. osztály

Az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzatának nevezzük azt a vektort, amely merőleges az **a** és **b** vektorokra, és iránya megegyezik jobb kezünk középső ujjának irányával, ha a jobb kezünk hüvelykujja az **a**, mutatóujja pedig a **b** vektor irányába mutat. (Jobbrendszert alkotnak.)
A vektoriális szorzat hossza pedig: $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\sin\varphi,$ ahol φ az **a** és **b** vektorok hajlásszöge.

1, Igazoljuk, hogy

a.) $\underline{a}\times\underline{b}=-\underline{b}\times\underline{a},$

b.) $\underline{a}\times\underline{a}=0,$

c.) $\lambda(\underline{a\times b})=(\underline{\lambda a})\times\underline{b}=\underline{a}\times(\underline{\lambda b}).$

2, a.) Vetítsük az **a** vektort merőlegesen egy az **e** egységvektorra merőleges síkra. Igazoljuk, hogy a vetület hossza egyenlő $|\underline{e}\times\underline{a}|$ -val.

b.) Legyen **a**’ az a vektornak egy az **e** egységvektorra merőleges síkon levő merőleges vetülete. Igazoljuk, hogy **a**’-t az e körül $+90°$ -kal elforgatva az $\underline{e}\times\underline{a}$ vektort kapjuk.

c.) Igazoljuk, hogy $\underline{a}'=(\underline{e}\times\underline{a})\times\underline{e}.$

3, Igazoljuk, hogy a vektoriális szorzás az összeadásra nézve disztributív.

4, Legyen **a**+**b**+**c**=**0**. Mutassuk meg, hogy $\underline{a}\times\underline{b}=\underline{b}\times\underline{c}=\underline{c}\times\underline{a}.$

5, Igazoljuk, hogy ha $\underline{a}\times\underline{b}=\underline{b}\times\underline{c}=\underline{c}\times\underline{a},$ akkor **a**, **b** és **c** párhuzamos vektorok vagy **a**+**b**+**c**=**0**.

6, Legyenek $\overrightarrow{OA}=\underline{a},\ \overrightarrow{OB}=\underline{b},\ \overrightarrow{OC}=\underline{c}$ és $\underline{a}\times\underline{b}+\underline{b}\times\underline{c}+\underline{c}\times\underline{a}=\underline{0}.$ Igazoljuk, hogy A, B és C egy egyenesre illeszkednek.

7, Az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy az ACE háromszög területe egyenlő a BDF háromszög területével.

8, Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex ötszög négy oldala párhuzamos a vele szemközti átlóval, akkor ez igaz az ötödik oldalra is.

9, Igazoljuk, hogy az érintőnégyszög átlóinak felezőpontjai és a beírt kör középpontja egy egyenesen vannak

10, Egy konvex $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy ha M rajta van az ABM háromszög súlypontját a CDM háromszög súlypontjával összekötő egyenesen, akkor a négyszög trapéz.

11, Egy szabályos 10 oldalú sokszög egy tetszőleges belső pontját a sokszög csúcsaival összekötve 10 darab háromszöget kapunk. A háromszögeket adott körüljárás szerint felváltva pirosra, illetve kékre festjük. Bizonyítsuk be, hogy a kék területek összege egyenlő a piros területek összegével.

(Az első hat feladat a geometriai feladatgyűjteményben, a továbbiak Róka Sándor tanár úr gyűjtésében találhatók.)