Szakköri feladatok

„Azok a régi OKTV-k!”
2. sorozat

1, Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:
$$x\cdot\sqrt{y^2-4}+2x^2-x=0$$
$$x^2-4x-\sqrt{2y-y^2}=-3.$$

2, A $6,8,16,14,7,9,18,16,\dots$ számsorozatot a következőképpen képezzük:
a 2. , 6. , …, (4k+2)-edik tagja az előtte álló tagnál 2-vel nagyobb;
a 3., 7., …. , (4k+3)-adik tag az előtte álló kétszerese;
a 4., 8., …., (k+4)-edik tag az előtte állónál 2-vel kisebb; végül
az 5., 9., … ,(4k+5)-ödik tag az előtte állónak a fele. $(k\geq 0, egész)$
Szerepel-e a sorozat tagjai között az 1995, ha igen milyen sorszámmal?

3, Bizonyítsuk be, hogy ha x és y pozitív egész számok, akkor
$$x^2+y^2+x+y$$
nem lehet egyenlő10 egyetlen pozitív egész kitevős hatványával sem!

4, Az ABC háromszöget beírt körének középpontjára tükrözve az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC oldalainak hossza $a, b, c,$ akkor az ABC és $A_1B_1C_1$ közös részét képező hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint
$$\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}.$$

5, Egy egységnyi élű tömör szabályos tetraéderből mindegyik csúcsánál levágunk egy $\frac{1}{n}$ élhosszúságú szabályos tetraédert, ahol az n 1-nél nagyobb egész szám. Milyen n érték esetén lesz a megmaradó test felszínének és térfogatának hányadosa a lehető legkisebb?

6, Az a és b pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{3}\leq\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}<\frac{1}{2}.$$

7, Egy sorozatban $a_1=\frac{2}{3}, a_n=a_{n-1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}, ha\ n>1.$ Állítsuk elő a_n -et n függvényeként!

8, Az ABCD paralelogramma ABC háromszögének AC oldalához írt kör (azaz: külső érintő kör) a BA, ill. BC egyeneseket az X, ill. Y pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az XY egyenes az ACD háromszög beírt körét az AD, ill. CD oldalakon metszi!

9, Egy 7 egység oldalú négyzetben elhelyeztünk 51 pontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek között a pontok között van 3 olyan, amely lefedhető egy egységsugarú körrel!

10, Adjuk meg azokat a nemnegatív egészekből álló $(x; y)$számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:
$$\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x-y}\leq\sqrt{x+y}.$$