Teljes indukció
10. osztály

Teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások igazak, ha az n pozitív egész szám nagyobb vagy egyenlő valamely n_0 pozitív egész számnál (adjuk meg a legkisebb ilyen n_0-t).

1, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

2, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3, $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

4, $1^2-2^2+3^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

5, $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)\cdot n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

6, $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

7, $3^n>2^n+7n$.

Igazoljuk az alábbi oszthatóságokat $(n\in N^+)$

8, $36\,|\,7^n+30n+35$.

9, $133\,|\,11^{n+1}+12^{2n-1}$.

Igazoljuk, hogy:

10, $3+33+333+\ldots+33...333=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$. (A bal oldalon n-tagú összeg az utolsó.)

11..Egy síkbeli tartományt n darab egyenessel részekre osztunk. Mutassuk meg, hogy az így kapott "térkép" két színnel színezhető úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek .

12, Mutassuk meg, hogy n darab egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja.

13, Bizonyítsuk be, hogy minden 1-nél nagyobb pozitív egész szám sorrendtől eltekintve egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára (a számelmélet alaptétele).

Keressük meg a hibát a következő bizonyításokban!

14, Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő a rákövetkező egész számmal. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az n egész számra, azaz n = n + 1. Adjunk 1-et az egyenlet mindkét oldalához, ekkor azt kapjuk, hogy n+1 = n+2, tehát a tulajdonság öröklődik.

15, Bebizonyítjuk, hogy a sík minden pontja egy egyenesen van. Ehhez megmutatjuk, hogy véges sok pont a síkon mindig egy egyenesen van. Az állítás n = 2 esetén igaz, hiszen bármely két pont egy egyenesen van. Tegyük fel, hogy bármely n pont egy egyenesen van. Bizonyítjuk, hogy akkor bármely n+1 pont is egy egyenesen van. Ha ugyanis nem volna, az azt jelentené, hogy van a síkon n olyan pont, amelyek egy egyenesen vannak, és egy (n+1)-edik pont, amely nincs ezen az egyenesen. Ekkor elhagyva az egy egyenesen lévő n pont valamelyikét, ezzel a ponttal olyan n pontot kapnánk, amelyek már nincsenek egy egyenesen, ez pedig ellentmond az indukciós feltevésnek.