

Feladatok

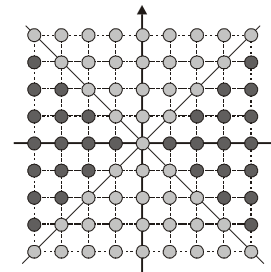
1. Színezzük meg a koordinátarendszer rácspontjait két színnel, kézzel és pirossal úgy, hogy minden vízszintes egyenesen csak véges sok kék rácspont legyen és minden függőleges egyenesen csak véges sok piros rácspont legyen. (Rácspontnak a sík olyan pontjait nevezzük, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)
2. Adjunk meg a pozitív egész számoknak három olyan részhalmazát, amelyek közül bármely kettő közös része végtelen, de a három halmaznak nincs közös eleme.
3. Egy zsákban végtelen sok cédula van, mindegyiken egy pozitív egész szám. Akárhogyan húzunk ki végtelen sok cédulát, mindig van közöttük kettő, amelyeken álló számok különbsége legfeljebb egy millió. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, amelyik végtelen sok cédulán szerepel.
4. Van-e a pozitív egész számoknak olyan részhalmaza, amely tartalmaz akármilyen hosszú számtani sorozatot, de nem tartalmaz végtelen hosszút?
5. Ismeretes, hogy a Tigris (a Micimackó egyik szereplője) felfelé tud mászni a fán, de lefele nem tud. Van-e olyan fa, amelyen a Tigris akárhány emelet magasra fel tud mászni, de végtelen magasra nem tud felmászni. (A fán emeletenként vannak elágazások.)

Megoldások

1. Színezzük meg a koordináta-rendszer rácspontjait két színnel, kékkel és pirossal úgy, hogy minden vízszintes egyenesen csak véges sok kék rácspont legyen és minden függőleges egyenesen csak véges sok piros rácspont legyen. (Rácspontnak a sík olyan pontjait nevezzük, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)

Tekintsük az $y=x$ és az $y=-x$ egyeneseket. Ezek négy tartományra osztják a síkot. Abban a kettőben, amely az y -tengelyt tartalmazza, fessük kékre a rácspontokat, abban a kettőben, amely az x -tengelyt tartalmazza, fessük pirosra a rácspontokat. A két határoló egyenes pontjait fessük kékre.

Ez a színezés megfelel a feladat követelményeinek.



1. **házi feladat:** Van-e ilyen színezés akkor is, ha rácspontnak a sík olyan pontjait tekintjük, amelyeknek mindkét koordinátája racionális szám?

2. Adjunk meg a pozitív egész számoknak három olyan részhalmazát, amelyek közül bármely kettő közös része végtelen, de a három halmaznak nincs közös eleme.

Tegyük az első halmazba azokat a számokat, amelyek hárommal osztva egy vagy kettő maradékot adnak, a második halmazba azokat, amelyek hárommal oszthatók vagy hárommal osztva egy maradékot adnak, végül a harmadik halmazba tegyük azokat, amelyek hárommal oszthatók vagy hárommal osztva kettő maradékot adnak. Ez a három halmaz megfelelő: nincs olyan egész szám, amely mindháromban benne van, hiszen az elsőből a hárommal oszthatók maradnak ki, a másodikból azok, amelyek hárommal osztva kettő maradékot adnak, a harmadikból azok, amelyek hárommal osztva egy maradékot adnak. Vagyis minden egész szám kimarad valamelyik halmazból.

Másrészt az első két halmaznak minden olyan szám közös eleme, amely hárommal osztva egy maradékot ad, az elsőnek és harmadiknak minden olyan szám közös eleme, amely hárommal osztva kettő maradékot ad, végül a másodiknak és harmadiknak a hárommal oszthatók a közös elemei. Tehát mindhárom közös rész végtelen.

Megjegyzés: Legyen A , B és C az egész számoknak három, páronként diszjunkt (közös elem nélküli) végtelen részhalmaza. Ekkor a feladat feltételeinek megfelel az $A \cup B$, $A \cup C$ és $B \cup C$ halmaz. (A fenti példában A , B és C a hárommal osztható számok halmaza, a hárommal osztva egy maradékot adó számok halmaza, illetve a hárommal osztva kettő maradékot adó számok halmaza.)

Könnyen általánosíthatjuk a feladatot: Legyen k pozitív egész. Ekkor megadható az egész számoknak k olyan pozitív részhalmaza, amelyek közül bármely $k-1$ részhalmaznak végtelen sok közös eleme van, de az összes részhalmaznak nincs közös eleme. Legyen A_i a k -val osztva i maradékot adó számok halmaza, ekkor megfelelő k halmazt kapunk, ha minden lehetséges módon veszünk e k halmaz közül $k-1$ -nek az unióját. Vagyis legyen

$$B_1 = A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k,$$

$$B_2 = A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_k,$$

és általában B_j az a halmaz, amely az összes A_j -től különböző A_i uniója, vagyis az a halmaz, amelyet úgy kapunk, hogy az egész számok halmazából elhagyjuk a k -val osztva i maradékot adó számokat. Könnyen ellenőrizhető, hogy akárhogyan választunk $k-1$ B_j halmazt, lesz egy olyan A_i halmaz, amelyet mindegyik tartalmaz, másrészt az összes B_j halmaznak nincs közös eleme.

2. házi feladat: Megadható-e végtelen sok olyan részhalmaza a pozitív egészeknek, amelyek metszete (közös része) üres, de bárhogy hagyva el egy részhalmazt, a többi közös része már végtelen?

3. Egy zsákban végtelen sok cédula van, mindegyiken egy pozitív egész szám. Akárhogyan húzunk ki végtelen sok cédulát, mindig van közöttük kettő, amelyeken álló számok különbsége legfeljebb egymillió. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, amelyik végtelen sok cédulán szerepel.

Tegyük fel, hogy minden szám csak véges sok cédulán szerepel. Ekkor végtelen sok különböző szám szerepel a cédulákon. Válasszunk ki minden ilyen számhoz egy cédulát, amelyen szerepel és rakjuk a rajtuk álló szám nagysága szerint növekvő sorrendbe ezeket a cédulákat. Ha most kiválasztunk minden 1000001-ik cédulát, akkor már két szomszédos különbsége is nagyobb lesz egy milliónál, tehát bármely két szám különbsége is nagyobb lesz egy milliónál. Ezzel kiválasztottunk végtelen sok cédulát, amelyek közül semelyik kettő különbsége nem kisebb egy milliónál, ami ellentétes a feladat feltételével. Így eredeti feltevésünk volt helytelen: valóban van olyan szám, amely végtelen sok cédulán szerepel.

Megjegyzés: Nyilván az egymillió helyett bármilyen pozitív egész számra is igaz a feladat állítása.

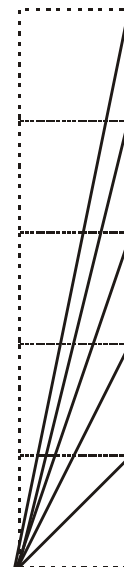
4. Van-e a pozitív egész számoknak olyan részhalmaza, amely tartalmaz akármilyen hosszú számtani sorozatot, de nem tartalmaz végtelen hosszút?

Ilyen például az $1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 19, 23, 27, 31, \dots$ részhalmaz. Ezt a részhalmazt úgy képezzük, hogy az n -edik tömb egy $n+1$ hosszúságú, n különbségű számtani sorozat, és első eleme megegyezik az előző ($n-1$ -edik tömb) utolsó elemével: $1, 2$ az első tömb, $2, 4, 6$ a második tömb, $6, 9, 12, 15$ a harmadik tömb, $15, 19, 23, 27, 31$ a negyedik tömb, stb. Nyilvánvaló, hogy ebben van akármilyen hosszú számtani sorozat, hiszen úgy csináltuk. Viszont nincs benne végtelen hosszúságú számtani sorozat. Legyen ugyanis egy számtani sorozat benne, amelynek d a különbsége. A $d+1$ -edik tömbtől kezdve bármely két elem különbsége legalább $d+1$, tehát innentől kezdve már legfeljebb egy szám szerepelhet a sorozatban. Az előző tömbök elemeinek száma viszont véges: $2+3+4+\dots+d=d(d+1)-1$, tehát egy d különbségű számtani sorozatnak legfeljebb $d(d+1)$ eleme lehet ebben a halmazban, ami véges. Ezzel a feladatot beláttuk.

3. házi feladat: Feloszthatók-e a pozitív egészek két részhalmazra úgy, hogy mindkét részhalmazra teljesüljön a fenti feladat feltétele?

5. Ismeretes, hogy a Tigris (a Micimackó egyik szereplője) felfelé tud mászni a fán, de lefele nem tud. Van-e olyan fa, amelyen a Tigris akárhány emelet magasra fel tud mászni, de végtelen magasra nem tud felmászni. (A fán emeletenként vannak elágazások.)

Ilyen fa van, egy megfelelő fa egy részlete látható az ábrán. Ennek a fának a tövéből indul ki minden ág és minden n pozitív egészhez tartozik egy ág. Az n -edik ág n emelet magasságáig ér.



1. Színezzük meg a koordináta-rendszer rácspontjait két színnel, kékkel és pirossal úgy, hogy minden vízszintes egyenesen csak véges sok kék rácspont legyen és minden függőleges egyenesen csak véges sok piros rácspont legyen. Rácspontnak most a sík olyan pontjait nevezzük, amelyeknek mindkét koordinátája *racióális* egész szám.
2. Megadható-e végtelen sok olyan részhalmaz a pozitív egészeknek, amelyek metszete (közös része) üres, de bárhogy hagyva el egy részhalmazt, a többi közös része már végtelen?
3. Feloszthatók-e a pozitív egészek két részhalmazra úgy, hogy mindkét részhalmazra teljesüljön a múltkori 4. feladat feltétele? Azaz úgy, hogy mindkét halmazban legyen akármilyen hosszú számtani sorozat, de egyikben se legyen végtelen hosszú számtani sorozat.
4. Olivér és Xénia az „amőbajáték” következő módosított változatát játsszák végtelen négyzetrácsos papíron. Olivér minden lépésben egy O-t tehet, Xénia két X-et. Xénia célja az, hogy valamelyik vízszintes sorban száz X legyen egymás mellett. Meg tudja-e ezt akadályozni Olivér, ha okosan játszik?
5. Kék és Piros a következőt játsszák: Piros minden lépésben kiszínez egy még nem színes pontot pirosra, Kék száz még nem színes pontot kékre. A sík összes pontja közül választhatnak. Piros célja az, hogy legyen három olyan piros pont, amelyek egy szabályos háromszög csúcsai. Meg tudja-e ezt akadályozni Kék, ha okosan játszik?
6. Bizonyítsuk be, hogy ha az előző alkalommal említett Tigrisnek olyan fán kell másznia, amelynek minden emeletén csak véges sok elágazás van, akkor végtelen magasra is fel tud mászni, azaz van olyan végtelen hosszú út, amelyen mindig felfelé mászhat. (Mint ismeretes, a Micimackó jól ismert Tigrise csak felfelé tud mászni a fán, lefele nem.)
Ez a feladat továbbra is **házi feladat**.
7. Egy további – nagyon nehéz – házi feladat:

2. házi feladat

Legyenek egy gráf pontjai a pozitív egészek. A pozitív egészek számpárjait sorba rendezzük (ezt meg tudjuk tenni, ld. fent), és mindegyiknél egy szabályos érme feldobásával döntjük el, hogy behúzzuk-e a neki megfelelő élt a gráfba, vagy sem: ha fej, akkor behúzzuk, ha írás, akkor nem. Így kapunk egy úgynevezett megszámlálható véletlen gráfot. Hajtsuk végre most még egyszer ugyanezt az eljárást, így kapunk egy másik végtelen gráfot. Bizonyítsuk be, hogy a két gráf egy valószínűséggel izomorf: a pontjai megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy két pont az egyikben pontosan akkor legyen összekötve, ha a másikban a neki megfelelő két pont is össze van kötve.

Megoldások

1. Színezzük meg a koordináta-rendszer rácspontjait két színnel, kézzel és pirossal úgy, hogy minden vízszintes egyenesen csak véges sok kék rácspont legyen és minden függőleges egyenesen csak véges sok piros rácspont legyen. Rácspontnak most a sík olyan pontjait nevezzük, amelyeknek mindkét koordinátája *racióális* egész szám.

Színezzük ki az egész-rácspontokat a kívánt módon (ezt a múltkori 1. feladatban látott módon tehetjük). Ezután feleltessük meg az egész számokat egy-egy értelműen a racionális számoknak, és írjuk az x tengely minden egész pontjára az ennek az egésznek megfeleltetett racionális számot. Ezután minden $x=i$ egyenletű egyenest (ahol i egész) toljunk el az $x=r_i$ egyenletű egyenesbe, ahol r_i az i -nek megfeleltetett racionális szám. Miután minden függőleges egyenes függőleges egyenesbe ment át és minden vízszintes egyenes megmaradt, csak a pontjai cserélődtek fel, ezért a színezés továbbra is „tudja”, amit a feladat kíván: minden vízszintes egyenesen csak véges sok kék pont van és minden függőlegesen csak véges sok piros. Most írjuk ra az y tengely minden egész pontjára a neki megfeleltetett racionális számot és toljunk el minden $y=i$ (vízszintes) egyenest az $y=r_i$ (vízszintes) egyenesbe. A színezés továbbra is jó lesz és mostmár minden racionális rácspont ki van színezve.

2. Megadható-e végtelen sok olyan részhalmaza a pozitív egészeknek, amelyek metszete (közös része) üres, de bárhogy hagyva el egy részhalmazt, a többi közös része már végtelen?

Megadható. Egy példa: Az i -edik halmaz álljon az összes pozitív egészéből, kivéve az 1-ből és a p_i -vel osztható számokból, ahol p_i az i -edik prím. Ekkor az összes halmaz metszetében azok az 1-től különböző számok vannak, amelyek egyetlen prímmel sem oszthatók. De ilyen szám nincsen, tehát ez a metszet üres. Ha viszont az i -edik halmazt elhagyjuk, a többi metszetében már benne van az összes olyan szám, amely csak p_i -vel osztható, vagyis az összes p_i -hatvány, ez végtelen sok elem.

3. Feloszthatók-e a pozitív egészek két részhalmazra úgy, hogy mindkét részhalmazra teljesüljön a múltkori 4. feladat feltétele? Azaz úgy, hogy mindkét halmazban legyen akármilyen hosszú számtani sorozat, de egyikben se legyen végtelen hosszú számtani sorozat.

Be lehet bizonyítani, hogy a múltkor megadott sorozat és a komplementere megfelel a feltételnek. Ehelyett azonban most két másik megoldást mutatunk. Az egyik ugyan mélyebb megfontolást használ, mint amire a feladat megoldásához szükség lenne, viszont az ötlet éppen ezért sokszor használható, ezért mutatjuk meg.

I. megoldás: A pozitív egészek minden végtelen számtani sorozatát meghatározza az első eleme valamint a különbsége. Mindkettő pozitív egész szám, tehát a pozitív számok végtelen számtani sorozatai egy-egyértelműen megfeleltethetők a pozitív síknegyed egész rácspontjainak. Ezekről viszont már tudjuk, hogy sorozatba rendezhetők (például a „csigavonallal”, vagy úgy, hogy minden i -re végigjárjuk az $y=i-x$ egyenes pozitív síknegyedbe eső véges sok rácspontját). Tehát a (különböző) *pozitív egészekből álló végtelen számtani sorozatok* sorozatba rendezhetők (megszámlálható sokan vannak, \aleph_0 számosságúak). Rendezzük tehát sorozatba őket! Ezután tegyük a következőt: az első sorozat első elemét tegyük az A halmazba, az első sorozat második elemét tegyük B -be. Ezután vegyük a második sorozatot, ennek két egymás utáni elemét tegyük A -ba, másik két egymás utáni elemét tegyük B -be. Baj csak akkor lehetne, ha a sorozat bármely két egymás utáni eleme közül legalább az egyiket már betettük volna vagy A -ba vagy B -be. De mind A -ba, mind B -be csak egy-egy

elemet tettünk eddig, bőven áll tehát még rendelkezésünkre megfelelő pár. Ezután tegyük fel, hogy az első $n-1$ sorozatból már beraktunk néhány elemet A -ba és néhány elemet B -be (az i -edikből éppen i darab egymás utánit A -ba és ugyanennyit B -be). Ezután vegyük sorra az n -edik sorozatot. Ebből eddig csak véges sok elemet választottunk ki $A \cup B$ -be, tehát van olyan tagja ennek a sorozatnak, ahonnan kezdve már egyetlen elemét sem választottuk még ki. Innentől kezdve n darab egymás utáni elemét tegyük A -ba, majd a következő n darab egymás utáni tegyük B -be. Miután ezt az eljárást végigcsináltuk, maradhatnak még olyan pozitív egész számok, amelyeket sem A -ba, sem B -be nem választottunk ki. Ezeket tegyük mondjuk A -ba. Az így kapott két halmaz egyike sem tartalmaz végtelen hosszú számtani sorozatot, mert minden számtani sorozatból tettünk a másikba is. Másrészt akármilyen hosszú számtani sorozatot tartalmaz, hiszen mindkettőt úgy csináltuk, hogy minden n -re legyen benne n hosszú számtani sorozat.

Megjegyzés: Ez a megoldás, mint említettük, egy nagyon erős ötletet használ (segítségével sokkal többet is be lehetne bizonyítani). Hátránya viszont, hogy nem ad konkrét konstrukciót. A következő megoldás egy egyszerű konstrukcióval oldja meg a feladatot:

II. megoldás: A két halmaz legyen a következő:

1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...

2, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, ...

Tehát: a pozitív egészeket felosztjuk tömbökre úgy, hogy az n -edik tömbbe $2^{n-1}+1$ -től 2^n -ig tesszük a számokat, majd a páros számú tömböket az egyik halmazba tesszük, a páratlan számúakat a másikba. (A nulladik tömb: 1, az első tömb: 2, a harmadik tömb: 3,4, a negyedik tömb 5,6,7,8, stb.)

Nyilvánvaló, hogy mindkét halmazban van akármilyen hosszú (1 különbségű) számtani sorozat és egyikben sincs végtelen hosszú, hiszen van akármilyen nagy „luk” mindkettőben.

4. Olivér és Xénia az „amőbajáték” következő módosított változatát játsszák végtelen négyzetrácsos papíron. Olivér minden lépésben egy O-t tehet, Xénia két X-et. Xénia célja az, hogy valamelyik vízszintes sorban száz X legyen egymás mellett. Meg tudja-e ezt akadályozni Olivér, ha okosan játszik?

Megmutatjuk, hogy ha Xénia okosan játszik, Olivér nem tudja őt megakadályozni célja elérésében. Az első 2^{99} lépésben foglaljon le magának 2^{100} sort, vagyis az első 2^{100} X-et tegye különböző sorokba. Ezeknek legfeljebb a felét tudja Olivér „elrontani”, vagyis lesz még 2^{99} olyan sor, amelybe Xénia letett egy-egy X-et, Olivér pedig még nem rakott O-t. Ezután a következő 2^{98} lépésben ezek mellé az X-ek mellé helyezzen egy-egy új X-et, ez összesen 2^{99} X-et jelent (ha valamelyik mellé nem tud, akkor a helyett bárhova tehet). Olivér ezek közül csak 2^{98} sorba tud csak O-t tenni, tehát legalább 2^{98} sorban lesz Xénianak két-két egymás melletti X-e úgy, hogy Olivér abba a sorba még nem tett O-t. Ezt az eljárást folytathatja: minden ilyen ciklusban legalább a fele megmarad a lefoglalt sorainak és minden ciklusban a megmaradt soraiban eggyel növelte az egymás melletti X-ek számát. A legvégén tehát kap egy (2^0) olyan sort, amelyben 100 egymás melletti X van (és Olivér nem tett oda O-t).

Megjegyzés: 1) Ki se használtuk, hogy ha Olivér az X-sornak csak az egyik oldalára rak, akkor Xénia még folytathatja a másik oldalon.

2) Xénia nemcsak a végtelen négyzetrácsos papíron tud nyerni, hanem egy korlátos (bár meglehetősen nagy) $2^{100} \times 100$ -as négyzetrácsos papíron is. Sőt, egyetlen elég hosszú sorban is tud nyerni, ha az első X-eket elég messze (egymástól például 200 távolságra) helyezi el.

3) Természetesen Xénia minden olyan esetben nyerni tud, amikor ő legalább eggyel több X-et rakhat le minden lépésben, mint ahány O-t Olivér lerak.

5. Kék és Piros a következőt játsszák: Piros minden lépésben kiszínez egy még nem színes pontot pirosra, Kék száz még nem színes pontot kékre. A sík összes pontja közül választhatnak. Piros célja az, hogy legyen három olyan piros pont, amelyek egy szabályos háromszög csúcsai. Meg tudja-e ezt akadályozni Kék, ha okosan játszik?

Megmutatjuk, hogy piros még ilyen kedvezőtlennek látszó körülmények között is könnyen nyerhet. Színezzen ki ugyanis egy egyenesen 102 pontot pirosra az első 102 lépésben. Ezek közül bármely kettőhöz található két olyan pont, amelyekkel szabályos háromszöget alkotnak. Másrészt minden ilyen pont egyértelműen határozza meg, hogy az egyenes melyik két pontját egészíti ki szabályos háromszöggé. Ezért Kéknek az első 102 lépésben 102·101 pontot kellene kékre színezzie ahhoz, hogy Piros a következő lépésben ne nyerjen. De csak 102·100-at színezzhet kékre az első 102 lépésben. Piros tehát nyer, mégpedig olyan stratégiával, amelynél csak az utolsó lépésben kell figyelnie arra, hogy Kék mit csinált.

Hamarabb is nyerhet: lerak 51 pontot tetszőlegesen, majd az 52-edik pontot olyan messzire rakja, hogy az eddigi 51 ponttal alkotott párokat szabályos háromszögekké kiegészítő pontok kívül essenek azon a tartományon, amelyben színezett pontok vannak. Ekkor Kéknek 51·2 új „veszélyes” pontot kellene hatástalanítania, de csak 100-at tud.

Megjegyzés: Az utóbbi stratégiának az a hátránya, hogy Kék játékától függően akármilyen nagy területre szüksége lehet Pirosnak. Az első stratégia kicsit lassabb, de akármilyen kis sávon is lejátszható, sőt, a sík akármilyen kis részén is.

A matematikai OKTV spec-matos feladatsorát beszéltük meg.

OKTV 2002-2003, I. forduló, III. kategória

1. feladat

Jelölje V egy téglatest térfogatának mérőszámát köbcentiméterben mérve, F pedig a felszínének mérőszámát négyzetcentiméterben mérve. Mennyi a lehető legkisebb térfogata egy olyan téglatestnek, amelyre $V = 10F$?

I. Megoldás:

Legyen a, b, c a téglatest egy csúcsából kiinduló élei. A téglatest térfogata és felszíne ismert képlet alapján: $V = abc$ és $F = 2(ab + bc + ca)$.

A feladat állítása szerint $V = 10F$

Tehát $abc = 20(ab + bc + ca)$

$a, b, c > 0$ ezért leoszthatunk $20abc$ -vel:

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$20 = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$60 = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Mivel az a, b, c oldalak pozitívak ezért felírhatjuk rájuk a harmonikus és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$60 = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{V}$$

Ahonnán

$$V \geq 60^3 = 216000$$

Egyenlőség $a = b = c = 60$ esetén áll fenn, mivel a harmonikus és mértani közép közt akkor van egyenlőség, ha $a = b = c$, ekkor $a^3 = 20(a^2 + a^2 + a^2)$, amiből $a = 60$.

Tehát a minimális térfogat 216000 cm^3 , és ekkor a téglatest egy 60 cm élű kocka.

II. Megoldás:

Ugyanúgy kezdjük, mint az előző bizonyítást:

$$abc = 20(ab + bc + ca)$$

Az ab, bc, ca számok pozitívak, ezért felírhatjuk rájuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[3]{abbcca} \leq \frac{ab + bc + ca}{3}$$

Felhasználva $abc = 20(ab + bc + ca)$ egyenletet:

$$\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \leq \frac{abc}{60}$$

$$60^3 \leq abc = V$$

Egyenlőség akkor van, ha $ab = bc = ca$ ebből következik, hogy egyenlőség akkor van, ha $a = b = c$, ekkor $a^3 = 20(a^2 + a^2 + a^2)$, amiből $a = 60$.

Tehát a minimális térfogat 216000 cm^3 , és ekkor a téglatest egy 60 cm élű kocka.

2. feladat

A H háromszöget daraboljuk fel a H_1, H_2, \dots, H_n részháromszögekre. Jelölje r , illetve r_i a H , illetve H_i háromszögek beírt sugarát. Mutassuk meg, hogy

$$r < r_1 + r_2 + \dots + r_n .$$

Megoldás:

Mivel a részháromszögek területének összege megegyezik a H háromszög területével, ezért H területét T -vel, a részháromszögek területét T_i -vel jelölve:

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n .$$

Ha bevetjük hasonlóképpen az s, s_i jelölést a megfelelő háromszögek félkerületére, akkor azt kapjuk a $T = s \times r$ területképlet felhasználásával, hogy $s \times r = s_1 \times r_1 + s_2 \times r_2 + \dots + s_n \times r_n$.

Osszunk le s -sel !

$$r = s_1/s \times r_1 + s_2/s \times r_2 + \dots + s_n/s \times r_n .$$

Ha belátjuk, hogy minden s_i/s tört értéke 1-nél nem nagyobb, akkor ennek felhasználásával a jobboldalon minden tagot nem csökkentve az igazolandó állításhoz jutnánk.

A továbbiakban tehát azt fogjuk bizonyítani, hogy egy háromszögbe írt másik háromszög kerülete kisebb a befoglaló háromszög kerületénél.

Legyenek a beírt háromszög oldalai x, y, z az ábra szerint. Toljuk befelé a befoglaló háromszög oldalait, míg azok nem érintik a beírt oldalait. Ezek a betolt oldalegyenesek a befoglaló háromszöghöz hasonló háromszöget határoznak meg, hiszen a szögek megegyeznek. Ennek, a befoglaló háromszög kicsinyített képének oldalai legyenek a, b, c .

Attól függően, hogy az x, y, z oldalú háromszögnek 0, 1, 2 vagy 3 párhuzamos oldala van az a, b, c oldalúval, 4 különböző eset lehetséges: (Lásd az ábrát!)

1. eset - 0 párhuzamos oldal

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $a_1 + c_2 > x, a_2 + b_1 > y, b_2 + c_1 > z$, amiből következik $x + y + z < a + b + c \leq 2s$, amit igazolni akartunk.

2. eset - 1 párhuzamos oldal

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $a - x + b_1 > y, b_2 + c > z$, amiből ismét $x + y + z < a + b + c \leq 2s$.

3. eset - 2 párhuzamos oldal ($a = x$)

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $b - y + c > z$, amiből $x + y + z < a + b + c \leq 2s$.

4. eset - 3 párhuzamos oldal ($a = x, b = y, c = z$)

$$x + y + z = a + b + c \leq 2s .$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. feladat

Az ABC háromszög A csúcsából a B és C csúcsokból induló belső szögfelezőkre bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek A_1 és A_2 . Ugyanígy értelmezzük a B_1 és B_2 , valamint C_1 és C_2 talppontokat is. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ összeg egyenlő a háromszög félkerületével.

Megoldás:

A háromszög szögfelezői egy ponton mennek át, ez egyben a beírt kör középpontja. Legyen ez a pont K (1. ábra), a háromszög szögei pedig a szokásos jelöléssel α , β és γ . A BK egyenes a B csúcsból induló szögfelező, ezért KBC szög nagysága $\beta/2$. Hasonlóképpen KC egyenes a C csúcsból induló szögfelező, így KCB szög nagysága $\gamma/2$. Az KBC háromszög szögeinek összege 180° , ezért BKC szög egyenlő $180^\circ - \beta/2 - \gamma/2$ -l. Mivel α , β és γ az ABC háromszög szögei, $\alpha + \beta + \gamma$ éppen 180° , azaz $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$. Vagyis BKC szög $= 180^\circ - (\beta + \gamma)/2 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha)/2 = 90^\circ + \alpha/2$. BKC szög és A_1KA_2 csúcshögek, így $A_1KA_2 \angle = BKC \angle = 90^\circ + \alpha/2$. A feladat feltétele szerint A_1 -nél és A_2 -nél derékszög van, így a Thalesz-tétel megfordítása miatt az A_1KA_2 négyszög húrnégyszög, melynek körülírt körének átmérője AK szakasz. Ez azt jelenti, hogy a másik két szemben lévő szög összege is 180° , azaz: $A_1AA_2 \angle = 180^\circ - A_1KA_2 \angle = 180^\circ - (90^\circ + \alpha/2) = 90^\circ - \alpha/2$.

Írjuk fel a szinusztételt az A_1AA_2 háromszögben: $A_1A_2/\sin A_1AA_2 = 2R$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara. Láttuk, hogy ezen a körön rajta van K is, és a kör átmérője éppen AK . Azaz $R = AK/2$, és így $2R = AK$.

Ezek alapján: $A_1A_2 = AK \cdot \sin A_1AA_2 = AK \cdot \sin(90^\circ - \alpha/2) = AK \cdot \cos \alpha/2$, az ismert trigonometrikus azonosságot alkalmazva. Azt szeretnénk tudni, mennyi lehet ennek a kifejezésnek az értéke. Ehhez vizsgáljuk a 2. ábrát. Tudjuk, hogy AK szögfelező, és K a beírt kör középpontja. Ezért a K -ből AC oldalra állított merőleges talppontja, T , éppen a beírt kör érintési pontja. Ismert, hogy ekkor $AT = s - a$, ahol s az ABC háromszög félkerülete, a pedig az A csúccsal szemközti oldalának hossza. Ugyanakkor az ATK derékszögű háromszögben a KAT szög nagysága $\alpha/2$, hiszen AK felezi az A -nál lévő szöget. T -nél derékszög van, tehát: $\cos \alpha/2 = AT/AK$. Átrendezve: $AK \cdot \cos \alpha/2 = AT = s - a$. Láttuk, hogy $A_1A_2 = AK \cdot \cos \alpha/2$, azaz: $A_1A_2 = s - a$.

Hasonlóképpen kapjuk, hogy $B_1B_2 = s - b$, illetve $C_1C_2 = s - c$, ahol $b = AC$ és $c = AB$. s az ABC háromszög félkerülete, azaz $s = (a + b + c)/2$.

Mindezeket összevetve:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = (s-a) + (s-b) + (s-c) = 3s - (a+b+c) = 3s - 2s = s.$$

Tehát beláttuk, hogy az $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ összeg egyenlő az ABC háromszög félkerületével.

4. feladat

Két zsákban piros és fehér golyók vannak. A kisebbikben 20 piros és 20 fehér, a nagyobbikban 1005 piros és 995 fehér golyó található. Tetszésünk szerint kiválasztjuk az egyik zsákot, ebből kihúzzunk egy golyót, megnézzük és félretesszük, majd ismét tetszésünk szerint kiválasztunk a két zsák közül egyet, és kihúzzunk belőle egy golyót. Milyen stratégiával érhetjük el, hogy a két kihúzott golyóból a lehető legnagyobb valószínűséggel legyen legalább az egyik piros?

Megoldás:

Előre eldönthetjük azt, hogy a másodszorra melyik zsákból fogunk húzni, mivel a második húzás csak akkor számít, ha először fehér golyót húztunk, így feltételezhetjük, hogy először fehéret húzzunk. Három fajta eset létezik: Amikor kétszer húzzunk a nagyobbik zsákból, amikor kétszer húzzunk a kisebbik zsákból, illetve amikor egyszer-egyszer mindkettőből. Ez utóbbi eset kétszer fordul elő, de számunkra a zsákokból húzás sorrendje mindegy, mivel a két esemény független egymástól. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy taktikánál mekkora eséllyel nem húzzunk egyszer sem pirosat!

- I.Eset: Annak a valószínűsége, hogy mindkétszer fehér golyót húzunk (P_A)= $995/2000 \cdot 994/1999$, ahol $995/2000$ annak a valószínűsége, hogy először fehér golyót húzunk, mivel összesen 2000 golyó van, de ebből csupán 995 fehér. $994/1999$ pedig annak a valószínűsége, hogy másodszor is fehér golyót húzunk, ha először fehéret húztunk, mivel eggyel csökkent mind a golyók, mind a fehér golyók száma. A kettő szorzata így annak a valószínűségét adja meg, hogy kétszer egymás után fehéret húzunk. $P_A \approx 24,74\%$
- II.Eset: Ugyanúgy számolva, mint az első esetben, $P_B = 20/40 \cdot 19/39$ ami megközelítőleg 24.36%
- III.Eset: A harmadik eset számítási módja egyezik az első kettőével leszámítva, hogy itt az első húzás valószínűsége nem befolyásolja a másodikét.
Így $P_C = 20/40 \cdot 995/2000$, ami pontosan 24,875%
Annak a valószínűsége, hogy legalább egy piros golyót húzunk 1-re egészíti ki annak a valószínűségét hogy nem húzunk pirosat, azaz két fehéret húzunk. A második esetben a legkisebb annak a valószínűsége, hogy két fehér golyót húzunk, így ott a legvalószínűbb, hogy legalább egy pirosat húzunk. Legjobb stratégia tehát kétszer a kisebb zsákból húzni.

5. feladat:

Megadható-e 2002 különböző pozitív egész úgy, hogy közülük bármely két különbözőnek a különbsége abszolút értékben megegyezzek a legnagyobb közös osztójukkal?

Megoldás:

Teljes indukcióval mutatjuk meg, hogy valóban megadható 2002 szám a feladat feltételeinek megfelelően. Ekkor azt akarjuk belátni, hogy bármilyen n pozitív egészre teljesülhetnek a feltételek.

$n = 1$ -re van megoldás, pl. az 1 önmagában. (1 számra automatikusan teljesül a feltétel.) ($n = 2$ -re megfelelő számpár az 1 és a 2; $2 - 1 = 1$, és $(1, 2) = 1$.)

Tegyük fel, hogy adott n -re van megoldás, legyenek ezen számok a_1, a_2, \dots, a_n ($a_1 < a_2 < \dots < a_n$ feltehető)! Legyen ezen számok szorzata A ! Azt mutatjuk meg, hogy az $A, A + a_1, A + a_2, \dots, A + a_n$ szám $(n+1)$ -es kielégíti a feladat feltételeit. (Mivel a_1, a_2, \dots, a_n pozitív egészek, A is pozitív egész, tehát továbbra is pozitív egészeket kapunk, ami megfelel a feladatnak.)

Először tekintsünk egy $A + a_i, A + a_j$ párt (j legyen i -nél nagyobb, és mindkettő 1 és n közé esik)! $A + a_j - (A + a_i) = a_j - a_i$, az indukciós feltételből ez d , hogyha $(a_i, a_j) = d$. Másrészt $d \mid a_i$, és $d \mid a_j$, továbbá ebből $d \mid A$, azaz $d \mid A + a_i$, és $d \mid A + a_j$, azaz valóban közös osztója ezen két számnak. Ennél nagyobb közös osztója pedig nem lehet, hiszen a két szám legnagyobb közös osztója osztja a két szám különbségét is, ami pedig éppen az indukciós feltételből adódóan d . Azaz d valóban $A + a_i$ és $A + a_j$ legnagyobb közös osztója.

Most már csak azt kell megvizsgálni, hogy az $A, A + a_i$ párra is teljesül-e a feltétel. $(A + a_i) - A = a_i$, továbbá $a_i \mid a_i$ és $a_i \mid A$ miatt $a_i \mid A + a_i$, azaz valóban közös osztó is. De $A + a_i$ és A legnagyobb közös osztója osztja a két szám különbségét is, ami a_i , aminek önmagánál nagyobb osztója pedig nem lehet. Ekkor viszont $(A, A + a_i) = a_i$.

Tehát az így kapott $n + 1$ számra teljesülnek a feltételek, ezzel az indukciós bizonyítást befejeztük.

Tehát bármilyen n pozitív egészre, így 2002-re is megadható n különböző pozitív egész a feladat feltételeinek megfelelően.

1. (Kürschák 2002/2): Tekintsük a Fibonacci-számok $f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n \geq 3)$ rekurzióval meghatározott sorozatát. Tegyük fel, hogy az a és b pozitív egész számokra az a/b tört az f_n/f_{n-1} és f_{n+1}/f_n törtek egyikénél kisebb, másikánál nagyobb. Mutassuk meg, hogy $b \geq f_{n+1}$.

Először mutatunk egy egyszerű bizonyítást a feladat állítására. Utána mutatunk egy kissé hosszabbat, amely azonban rámutat a feladat háttérére, szoros kapcsolatára az úgynevezett Farey-törtekkel, továbbá kapcsolatára azzal a kérdéssel, hogy milyen jól közelíthetők az irracionális számok racionális számokkal.

I. MEGOLDÁS: A bizonyításhoz azt az észrevételt használjuk, hogy ha az f_{n+1}/f_n törtből kivonunk egyet és vesszük a reciprokát, akkor az eggyel kisebb indexű ugyanilyen törtet, f_n/f_{n-1} -et kapjuk (ez egyszerűen az f_n sorozat képzési sorozatából következik). Ennek alapján a feladat állítását n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$f_2/f_1=1, f_3/f_2=2, f_4/f_3=3/2$. Az 1 és 2 közé eső legkisebb nevezőjű tört $1/2$, $n=1$ -re tehát igaz az állítás. A 2 és $3/2$ közé eső legkisebb nevezőjű tört az $5/3$, tehát $n=2$ -re is igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy n -re és $n-1$ -re már tudjuk az állítást és legyen a/b egy tört, amely f_{n+1}/f_n és f_{n+2}/f_{n+1} között van. Azt kell belátnunk, hogy $b > f_{n+2}$.

Mint említettük, ha f_{n+1}/f_n -ből levonunk egyet és a reciprokát vesszük, akkor éppen f_n/f_{n-1} -et kapunk. Így $a/b-1$ reciproka, $b/(a-b)$ éppen f_n/f_{n-1} és f_{n+1}/f_n közé esik. Az indukciós feltevés szerint nevezőjéről tudjuk, hogy

$$(1) \quad a-b > f_{n+1}.$$

Most csináljuk végig ugyanezt a $b/(a-b)$ törtre is: vonjunk le belőle egyet és vegyük a reciprokát. Az így kapott $(a-b)/(2b-a)$ most f_{n-1}/f_{n-2} és f_n/f_{n-1} közé esik. Az indukciós feltevés szerint nevezőjéről tudjuk, hogy

$$(2) \quad 2b-a > f_n.$$

Az (1) és (2) egyenlőtlenségeket összeadva azt kapjuk, hogy $b > f_{n+2}$, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

MEGJEGYZÉS: A bizonyításból az is kiolvasható, hogy egyetlen f_{n+1} nevezőjű tört van az f_n/f_{n-1} és f_{n+1}/f_n törtek között, és ez f_{n+2}/f_{n+1} .

II. MEGOLDÁS: Először bebizonyítjuk a Fibonacci-sorozat egy nevezetes tulajdonságát, nevezetesen azt, hogy $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = 1$ vagy -1 , annak megfelelően, hogy n páros vagy páratlan. Kis n értékekre ez könnyen ellenőrizhető. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy

$$(1) \quad f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = 1 \text{ vagy } -1, n \text{ paritásától függően.}$$

Tekintsük az $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2$ kifejezést, és írjuk be f_{n+2} -re a rekurziót: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, ekkor azt kapjuk, hogy $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = f_{n+1}f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2$.

Itt $f_{n+1}f_n - f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n - f_{n+1}) = -f_{n+1}f_{n-1}$, tehát a jobb oldalon éppen az (1) bal oldalán álló kifejezés ellentettje áll. Ezzel beláttuk, hogy az $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2$ kifejezés abszolútértéke mindig 1 és felváltva $+1$ és -1 , és éppen ezt akartuk belátni.

Most bebizonyítunk néhány további állítást:

A) Tegyük fel, hogy $a, b, a', b' > 0, a/b < a'/b'$, ekkor $(a + a')/(b + b')$ e két tört közé esik: $a/b < (a + a')/(b + b') < a'/b'$.

Ez egyszerű átszorzással ellenőrizhető.

Az f_n/f_{n-1} és f_{n+1}/f_n törtek esetében ez azt jelenti, hogy az $(f_n + f_{n+1})/(f_{n-1} + f_n) = f_{n+2}/f_{n+1}$ tört mindig e két tört közé esik.

B) Tegyük fel, hogy még azt is tudjuk, hogy $a'b - ab' = 1$, vagyis hogy az a'/b' és az a/b törtek különbsége éppen $1/bb'$. Ekkor a/b és $(a + a')/(b + b')$ közötti bármely redukált tört nevezője nagyobb $b + b'$ -nél.

Azt kell tehát belátnunk, hogy ha c és d pozitív egészekre $a/b < c/d < (a + a')/(b + b')$, akkor $d > b + b'$.

Tekintsük a $c/d - a/b$ különbséget. Ez egyrészt kisebb, mint

$$(a + a')/(b + b') - a/b = (a'b - ab')/bb' = 1/b(b + b'),$$

másrészt egyenlő $(cb - ad)/bd$ -vel. Itt a számláló pozitív egész szám, tehát legalább 1. Vagyis: $1/bd < c/d - a/b < (a + a')/(b + b') - a/b = 1/b(b + b')$.

Ebből következik, hogy $d > b + b'$, ahogyan állítottuk.

C) Ugyanígy bizonyítható az is, hogy $(a + a')/(b + b')$ és a'/b' közötti bármely redukált tört nevezője is nagyobb $b + b'$ -nél.

Azt kaptuk, hogy ha $a, b, a', b' > 0$ egészek, $a'b - ab' = 1$ és egy a/b és a'/b' közé eső redukált tört különbözik az $(a + a')/(b + b')$ törttől, akkor nevezője nagyobb $b + b'$ -nél.

Beláttuk, hogy az $f_n, f_{n-1}, f_{n+1}, f_n$ számok teljesítik ennek az állításnak a feltételeit, tehát minden, az $(f_n + f_{n+1})/(f_{n-1} + f_n) = f_{n+2}/f_{n+1}$ törttől különböző redukált tört nevezője nagyobb f_{n+1} -nél, s éppen ezt kellett bizonyítani.

MEGJEGYZÉS: Az A), B), C) állítások együtt bizonyítják az úgynevezett Farey-törtek két alaptulajdonságát is. Az n -edik Farey-tört sorozatnak a legfeljebb n nevezőjű redukált törtek nagyság szerint (növekvő) sorrendben írt sorozatát nevezzük. Tehát az első Farey-tört sorozat egyszerűen az egészekből áll, a második

..., $-1, -1/2, 0, 1/2, 1, \dots$

alakú, a harmadik

..., $-1, -2/3, -1/2, -1/3, 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1, \dots$

alakú, stb., például a hetedik sorozatnak 0 és 1 közötti elemei:

0, $1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 2/5, 3/7, 1/2, 4/7, 3/5, 2/3, 5/7, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 1$.

Ha jobban szemügyre vesszük ezeket a sorozatokat, észrevehetjük, hogy egy sorban álló szomszédos Farey-törtek mindig teljesítik A) feltételét. Másrészt az n -edik sorozatba újonnan beírt törtek számlálója mindig a két szomszédos tört számlálójának összege, nevezője pedig a két szomszédos tört nevezőjének összege. Ezt a sorozatok n sorszámára vonatkozó teljes indukcióval az A), B) és C) állításokból egyszerűen be is bizonyíthatjuk. Ebből viszont következik egy nagyon erős, az irracionális számok megközelítésére (approximációjára) vonatkozó tétel. Ha azt kérdezzük, hogy egy a irracionális számot egy adott pozitív p nevezőjű törttel mennyire tudunk megközelíteni, akkor általában azt kapjuk, hogy a legjobban közelítő q/p alakú tört (q egész) $1/2p$ -nél jobban közelít, hiszen két szomszédos p nevezőjű tört közötti távolság $1/p$ és az a -t közrefogó két p nevezőjű tört közül a közelebbi kevesebb, mint $1/2p$ távolságra van. Ennél jobbat általánosan nyilván nem tudunk mondani. Viszont a Farey-törtekről mondottak alapján mégis tudunk valami jobbat mondani. Hiszen nézzük az n -edik sorozatban a -t közrefogó két törtet, legyenek ezek $a/b < a < a'/b'$ és tegyük fel, hogy $b < b'$. Ekkor $a - a/b < a'/b' - a/b = 1/bb' < 1/b^2$. Itt használtuk, hogy szomszédos Farey-törtekre $a'b - ab' = 1$, vagyis szomszédos Farey-törtek különbsége a nevezők szorzatának reciproka.

Azt kaptuk, hogy a/b $1/b^2$ -nél jobban megközelíti a -t. Ha pedig $b' < b$, akkor pontosan ugyanígy kapjuk, hogy $a'/b' - a < 1/b'^2$. Mindkét esetben azt kapjuk, hogy az a -t közrefogó Farey-törtek közül a kisebb nevezőjű a nevező négyzetének reciprokánál jobban közelíti a -t. Nyilvánvaló, hogy a közrefogó törtek végtelen sokszor fognak változni, ezért azt kapjuk, hogy

2. Tetszőleges a számhoz végtelen sok olyan p pozitív egész szám van, amelyhez található olyan q , hogy $|a - q/p| < 1/p^2$.

Ez a becslés viszont már alig javítható (1 helyett írható egy 1-nél kisebb szám).

Ehhez a tételhez kapcsolódik a következő

1. Házi feladat: Legyen a irracionális szám és tekintsük az $y = ax$ egyenest. Ezen az origón kívül nyilván nincs több rácspont. Bizonyítsuk be, hogy viszont tetszőlegesen közel hozzá van rácspont.

Egy további, részben ide kapcsolódó feladathoz vezetnek az alábbi feladatok:

3. Van-e olyan síkbeli halmaz, amely egybevágó egy valódi részhalmazával. (Egy halmaz valódi részhalmazának nevezzük egy a részhalmazt, ha részhalmaza, de nem azonos vele.)

MEGOLDÁS: Ilyen például egy szögtartomány, de ilyen bármely félegyenes is.

4. Van-e olyan síkbeli halmaz, amely megszámlálhatóan végtelen és egybevágó egy valódi részhalmazával?

MEGOLDÁS: Tekintsük az x tengely pozitív egész rácspontjait, ezek megfelelnek.

2. Házi feladat: Van-e korlátos síkbeli halmaz, amely egybevágó egy valódi részhalmazával?

GRÁFELMÉLETI FELADATOK

1. Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van a társaságban.

MEGOLDÁS: Legyen a társaság tagjainak száma n . A társaság tagjainak a társaságban 0-tól $n-1$ ismerőse lehet, ez n lehetőség. Nem lehet azonban a társaságban egyszerre olyan, akinek 0 ismerőse van és olyan, akinek $n-1$ ismerőse van, mert az előbbi senkit sem ismer, az utóbbi viszont mindenkit ismer. Tehát összesen legfeljebb $n-1$ lehetőség van arra, hogy kinek hány ismerőse van. A társaság tagjainak száma azonban n , tehát a „skatulyaelv” szerint van kettő, akinek ugyanannyi ismerőse van.

MEGJEGYZÉS: A bizonyításban feltettük, hogy a társaság tagjainak száma véges, amit egy társaságról joggal feltételezhetünk. A feltételt azért jegyeztük meg mégis, mert a feladatot most át fogjuk fogalmazni, s az átfogalmazásban már nem magától értetődő ez a feltételezés. Tekintsük például a következő állítást:

Egy társaságban lejátszottak néhány sakkmérkőzést. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg.

Nyilvánvaló, hogy ez a feladat „ugyanaz”, mint az előző. A fenti feladatban csak az volt az érdekes, hogy két ember ismerte-e egymást vagy sem, az újban az az érdekes, hogy két ember játszott-e egymással vagy sem. A megoldás tehát pontosan ugyanaz lesz, ha az „ismerősök” száma helyett a „sakkpartnerek” számát tekintjük.

Vagyis csinálhatjuk a következőt: az embereket egy-egy ponttal ábrázoljuk és két embert „összekötünk egy éllel”, ha ismerik egymást (az első megfogalmazásban), illetve ha játszottak egymással (a második megfogalmazásban). Egyáltalán nem érdekes, hogy milyen „éllel” kötjük össze: lehet az él egy egyenes szakasz, de lehet egy görbe is, ennek semmilyen szerepe nem lesz, csak az számít, hogy „fut-e él” a két pont között vagy sem. Az így kapott ábrát *gráfnak* nevezzük. A pontok a gráf *pontjai* vagy *csúcsai*, az összekötő vonalak a gráf *élei*. A gráfot *véges gráfnak* nevezzük, ha a pontjainak száma véges. Ha összeszámoljuk, hány él indul ki egy pontból, akkor a kapott szám a pont *fokszáma*, vagy röviden *foka*. A feladat (mindkettő) most már így fogalmazható:

Egy véges gráfban mindig van két olyan pont, amelyek fokszáma egyezik.

De vigyázzunk: ez még nem a végleges megfogalmazás. Miért nem? Térjünk vissza a sakkos megfogalmazáshoz. Ott feltettük, hogy két ember nem játszott egymással több mérkőzést. Ez a gráfos megfogalmazásban azt jelenti, hogy feltettük: semelyik két pont között nem fut több él, vagy másképp fogalmazva: feltettük, hogy a gráfban nincs *többszörös él*. Feltettük azt is, hogy semelyik pont nincs önmagával összekötve (senki nem játszik önmagával), vagy másképp: a gráfban nincs *hurokél*. Ha egy gráfban nincs többszörös él és nincs hurokél, akkor a gráfot *egyszerű gráfnak* nevezzük. Tehát a végleges gráfelméleti megfogalmazás így hangzik:

Egy véges egyszerű gráfban mindig van két olyan pont, amelyek fokszáma egyezik.

2. Vajon mi a helyzet, ha megengedünk többszörös éleket is? Igaz-e, hogy ha a sakkos megfogalmazásban megengedjük, hogy némelyek többször is játszottak egymással, akkor is biztosan van két olyan ember, akik ugyanannyi sakkpartit játszottak? Az előző feladatunk megoldása nagyon erősen használta, hogy a gráf egyszerű, tehát a fokszámok csak 0 és $n-1$ között változhatnak. Ha viszont megengedünk többszörös éleket is, akkor a fokszám bármilyen nagy lehet, a bizonyításunk tehát nem működik. Vajon csak a bizonyítás nem működik, vagy az állítás sem igaz?

MEGOLDÁS: Most könnyű ellenpéldát csinálni: tegyük fel például, hogy a társaságban csak három ember van, A, B és C . Tegyük fel, hogy A és B egy mérkőzést játszott egymással, B és C kettőt, A és C egyet sem. Ekkor A 1, B 3, C 2 mérkőzést játszott.

Ez mindenestre ellenpélda három pont (résztevő) esetén. De van-e akárhány pont (résztevő) esetén is ellenpélda? Négy pontra a következőképpen lehet ellenpéldát csinálni: felvesszük az előbbi gráfot, tehát egy három pontú gráfot, ahol az 1-es és 2-es között 1 él fut, a 2-es és 3-as között pedig kettő. Felveszünk továbbá egy negyedik pontot, amelyből nem fut ki él (az ilyen pontot *izolált pontnak* nevezik). Ezután berajzolunk a gráfba még egy olyan „kört”, amely minden ponton átmegy (az ilyen kört *Hamilton-körnek* nevezik), vagyis hozzávesszünk a gráfhoz például egy-egy 12, 23, 34, 41 élt (ahol már van, ott egy-egy további ilyen élt): ekkor 1 és 2 között két él fut, 2 és 3 között 3 él fut, a 3-as és 4-es pont között valamint a 4-es és az 1-es között egy-egy él fut. Most az 1-es pont fokszáma 3, a 2-esé 5, a 3-asé 4, a négyesé 2.

Vegyük észre, hogy ez az eljárás akárhány pontra folytatható. Tegyük fel, hogy már van egy olyan gráfunk, amelyben $n-1$ pont van és ezek fokszámai mind különböző pozitív számok. Vegyünk hozzá a gráfhoz egy további izolált pontot, így kapunk egy olyan gráfot, amelyben n pont van, és bármely két pont fokszáma különbözik. Ebből azonban még nem tudnánk továbbmenni, ezért illesszünk a gráfra egy Hamilton-kört, vagyis egy-egy olyan új élt, amely az 1-es és 2-es, a 2-es és 3-as, a 3-as és 4-es, ..., az $n-2$ -es és $n-1$ -es, az $n-1$ -es és n -es, végül az n -es és 1-es pontot köti össze. Ekkor minden pont fokszáma pontosan kettővel nő, tehát továbbra is minden pont fokszáma különböző lesz, de most már minden pont fokszáma pozitív (sőt: legalább kettő). Ezzel minden n -re találtunk olyan n pontú (nem egyszerű) gráfot, amelyben nincs két azonos fokszámú pont. (A konstrukcióban lényegében használtuk már a kör fogalmát, erre rögtön visszatérünk.)

3. Említettük már, hogy elképzelhető az is, hogy a gráfnak nem véges sok csúcsa van, hanem végtelen sok. Mi a helyzet ekkor? Igaz-e végtelen egyszerű gráfokra az állítás? Az 1. feladat megoldása a végeességet is nagyon használta. Végtelen (megszámlálhatóan végtelen) sok pont esetén ugyanis a fokszám végtelen is lehet, s ekkor nem világos, hogy mit jelent, hogy „ugyanakkora a fokszám”. De ha kikötjük, hogy minden pont foka véges legyen, akkor is a fokszám bármilyen nemnegatív egész szám lehet, a skatulyaelv tehát nem működik. De vajon igaz marad-e az állítás?

MEGOLDÁS: Megmutatjuk, hogy az állítás végtelen gráfokra nem igaz. Van ugyanis olyan végtelen egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma különböző. Legyenek a gráf pontjai az 1, 2, 3, 4, ... pozitív egész számok. Olyan gráfot akarunk csinálni, amelyben az i -edik csúcspont fokszáma éppen i . Minden pontra ráírjuk tehát a sorszámát, hogy tudjuk: ekkorra akarjuk a fokszámát. Ezután először összekötjük az 1-es pontot a 2-es ponttal. Ezzel az 1-es pont fokszáma megfelelő lett, őt tehát kihúzzuk és a 2-esre most 1-et írunk: még ennyi „hiányzik a fokszámából”, a többi pontra írt szám változatlan marad. Ezután sorra vesszük a 2-es pontot, ezt további 1 ponttal kell összekötnünk, összekötjük a 3-as ponttal. Elhagyjuk a 2-es pontot, hiszen most már az ő fokszáma is megfelelő és a 3-as pontra eggyel kevesebbet írunk. Most sorra vesszük a 3-as pontot, ezen jelenleg 2-es szám áll, ennyi élt kell még belőle behúznunk: összekötjük a 4-es és 5-ös ponttal, majd az ezekre írt számot csökkentjük eggyel és elhagyjuk a 3-as pontot. Így minden lépésben sorra vesszük a következő pontot, ha a pillanatnyilag rajta szereplő szám i , akkor összekötjük i olyan ponttal, amelyen jelenleg pozitív szám áll. Ezután ezt a pontot elhagyhatjuk, és a vele most összekötött pontokra írt számot eggyel csökkentjük. (Ha $i=0$ volt, akkor e szerint az eljárás szerint egyszerűen elhagyjuk a pontot, mert már „rendben van”.) Ezt az eljárást minden egyes pontra elvégezve

egy olyan gráfhoz jutunk, amelyben az i -edik pont fokszáma pontosan i .
A továbbiakban egyelőre véges gráfokkal fogunk foglalkozni, s most egy másik fogalmat is bevezetünk, a *kör* és az *út* fogalmát. Ehhez tekintsük a következő feladatot:

4. Egy társaságban mindenkinek van legalább két ismerőse (az ismeretség most is kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy van a társaságban néhány (legalább három) ember, akik leültethetők egy asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (A társaságnak természetesen véges sok tagja van.)

MEGOLDÁS: Vegyünk egy tetszőleges embert, legyen ő A_1 . Legyen egy ismerőse A_2 , legyen továbbá A_2 -nek egy A_1 -től különböző ismerőse A_3 , és általában legyen A_{k+1} -nek egy A_k -től különböző ismerőse A_{k+2} . Ilyen van, hiszen mindenkinek van legalább két ismerőse. Így kapjuk az embereknek egy $A_1A_2\dots A_m\dots$ végtelen sorozatát, ahol mindenki ismeri az előtte és utána következőt. Ez a sorozat azonban egy idő után biztosan tartalmaz ismétlődést, hiszen a társaságnak csak véges sok tagja van. Legyen A_{m+1} az első olyan ember, aki már szerepelt a sorozatban előbb is, mondjuk az n -edik helyen: $A_{m+1}=A_n$ ($n < m$). Ekkor A_n -et, A_{n+1} -et, A_{n+2} -et, ..., A_m -et ilyen sorrendben leültetve az asztal köré mindenki két ismerőse között fog ülni. (Ez igaz A_m -re is, mert $A_{m+1}=A_n$.)

A feladatot és megoldását átfogalmazhatjuk gráfelméleti nyelvre.

DEFINÍCIÓ: A gráf csúcsainak egy $A_1A_2\dots A_mA_{m+1}$ sorozatát, amelyben minden A_i -t él köt össze az utána következő A_{i+1} -gyel, a gráf egy *sétájának* nevezzük. Ha minden A_i csúcs különböző, akkor *útnak* nevezzük. Ha minden A_i különböző, csak $A_{m+1}=A_1$, akkor (gráfelméleti) *körnek* nevezzük. Az út, illetve a kör hossza m (vagyis a szomszédos csúcsokat összekötő élek száma), de szokták ehelyett a csúcsok számát is az út, illetve a kör hosszának tekinteni. A kör esetében mindkettő azonos, az út esetében egy a különbség. Megjegyezzük még, hogy a két pontból (tehát egy élből) álló út is út, viszont a legrövidebb körnek is legalább három csúcsa (és három éle) van.

Ezek után a feladat állítása a következőképpen fogalmazható át:

Ha egy véges egyszerű gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor a gráf tartalmaz kört.
Ebből már következik egy fontos tétel:

5. Ha egy n pontú egyszerű gráfban nincs kör, akkor legfeljebb $n-1$ éle van.

I. BIZONYÍTÁS: Teljes indukcióval bizonyítunk: $n=1$ esetén a gráfnak nincs éle, $n=2$ esetén a gráfnak legfeljebb egy éle van. Tegyük fel, hogy $n-1$ pontú gráfokra már tudjuk az állítást és legyen G egy n pontú egyszerű, körmentes gráf. Az előző feladat szerint G -ben van egy legfeljebb elsőfokú pont (különben G nem körmentes), legyen ez a pont x . Hagyjuk el a G gráfból az x pontot és a belőle (esetleg) induló élt. A maradék $n-1$ pontú gráfban továbbra sincs kör, így legfeljebb $n-2$ éle van az indukciós feltevés szerint. Ha ehhez hozzávesszük az x -ből induló egyetlen élt (ha van egyáltalán), megkapjuk, hogy G -nek legfeljebb $n-1$ éle van. Erre a feladatra még visszatérünk, előbb azonban az előző feladat egy élesítését fogjuk bebizonyítani:

6. Legyen $k > 1$ egész szám. Ha egy véges egyszerű gráfban minden pont foka legalább k , akkor a gráfban van legalább $k+1$ hosszú kör.

BIZONYÍTÁS: Induljunk ki ismét a gráf egy tetszőleges A_1 pontjából és alkalmazzuk a következő eljárást: ha már eljutottunk egy A_i ponthoz, s ennek a pontnak van még olyan szomszédja a gráfban, amely nem szerepel a kiválasztott A_j -k között, akkor legyen ez a (vagy

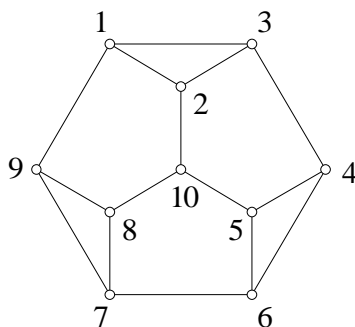
az egyik ilyen) szomszédja A_{i+1} , ekkor $A_1A_2\dots A_{i+1}$ továbbra is út a gráfban. Ez az eljárás előbb-utóbb megakad, hiszen elfogynak a gráf pontjai. Tegyük fel, hogy A_m -nél akadunk el. Ekkor A_m -nek minden szomszédja szerepel már az A_j -k között. Keressük meg a legkisebb indexűt közülük, legyen ez A_s . Ekkor $A_sA_{s+1}A_{s+2}\dots A_m$ kör és tartalmazza A_m -et, valamint A_m minden szomszédját. Mivel A_m -nek legalább k szomszédja van a feladat feltétele szerint, ezért ennek a körnek legalább $k+1$ pontja van.

MEGJEGYZÉS: A bizonyítás elmondható lenne úgy is, hogy tekintsük a gráf (egyik) leghosszabb útját. Ennek végpontjából a maximalitás miatt nem indulhat ki az úton kívüli pontba él, tehát mind a (legalább) k él az út pontjaiba vezet. A végponttól legtávolabbi pontba vezető éllel bezárt körnek ezért legalább $k+1$ pontja van.

Azért érdemes végiggondolni ezt a bizonyítást is, mert rámutat egy, a gráfelméletben (és általában a véges matematikában) sokszor alkalmazható ötletre: „vegyük a legnagyobbat” valamiből, s ez vezet el a megoldáshoz. A „csel” az, hogy nem feltétlenül abból kell a legnagyobbat venni, amiről a bizonyítandó állításban szó van. Mi sem a leghosszabb kört kerestük meg a gráfban (abból még nem jött volna ki a megoldás), hanem a leghosszabb utat!

7. Vajon az előző feladatban tudjuk-e garantálni azt is, hogy létezik pontosan $k+1$ hosszú kör, ha minden pont foka legalább k ? Vizsgáljuk meg a kérdést $k=3$ -ra és $k=4$ -re!

MEGOLDÁS: $k=3$ -ra a következő tízpontú gráf ellenpélda:



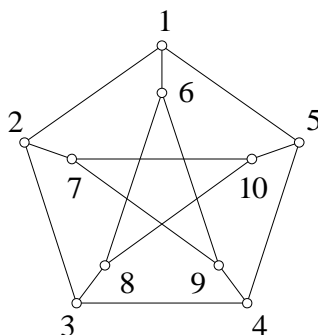
Ebben a gráfban minden pont foka három – ilyenkor a gráfot *3-reguláris* gráfnak nevezzük. Be kell még látnunk, hogy valóban nincs benne négy hosszú kör. Ezt kissé hosszadalmas volna végignézni, így megpróbáljuk a gráf szimmetriáit felhasználva szűkíteni a lehetőségek halmazát. Először is nézzük meg, hogy milyen szimmetriái vannak ennek a gráfnak. Nyilvánvaló, hogy a 10-es számú pont teljesen egyedülálló: ez a pont az egyetlen, amelynek három szomszédja között nem fut él. A 10-es pont tehát nem cserélhető fel egyetlen más ponttal sem. Viszont jól látható, hogy ha a gráfot a „10-es pont körül elforgatjuk” úgy, hogy az 1-es pont a 4-esbe kerüljön, akkor a gráf ugyanebbe a gráfba fog átmenni. Tehát az 1-es, 4-es és 7-es pontok szerepe szimmetrikus: bármelyik átvihető a másikba úgy, hogy a gráf „ugyanúgy nézzen ki”. Ugyanez igaz a 2-es, 5-ös és 8-as pontokra, valamint a 3-as, 6-os és 9-es pontokra is. Ha pedig a gráfot „tükrözzük a 10-es és 2-es pontok alkotta egyenesre”, akkor is önmagával azonos gráfba megy át, az 1-es pont pedig a 3-asba megy át. Ez azt jelenti, hogy az 1-es, 4-es és 7-es pont szerepe megegyezik a 3-as, 6-os és 9-es pont szerepével is. A gráf pontjai tehát három osztályba sorolhatók: az első osztályban van a 10-es pont, a másodikban a 2-es, 5-ös és 8-as pont, míg a harmadikban az 1-es, 4-es, 7-es, 3-as, 6-os és 9-es. Az azonos osztálybeli pontok szerepe szimmetrikus. Ez azt jelenti, hogy ha belátjuk, hogy az 1-es ponton keresztül nem megy négy hosszú kör, akkor a másik öt, vele egy osztályban levő ponton keresztül sem mehet.

Ezután vegyük észre, hogy a 10-es ponton keresztül nem mehet négy hosszú kör: a vele

összekötött pontok (2,5,8) között nincs kettő, amelynek lenne másik közös szomszédja. Ha tehát van a gráfban négy hosszú kör, akkor annak tartalmaznia kell egyet a harmadik osztály pontjaiból, hiszen a második osztályban csak három pont van. Ezek után elég azt belátnunk, hogy az 1-es ponton keresztül nem megy négy hosszú kör. Ráadásul a 10-es pontot ki is törölhetjük a gráfból: rajta keresztül biztosan nem megy négy hosszú kör. Ha az 1-es pont mellett a 2-es pontot is tartalmazza a kör, akkor tartalmaznia kell a 3-ast is (2-esnek nem maradt más szomszédja), és 1-esnek és 3-asnak nincs 2-esen kívül közös szomszédja. Ha a 2-est nem tartalmazza, akkor 1-es két szomszédja 3-as és 9-es, és ezeknek megint csak nincs közös szomszédjuk. Ezzel beláttuk, hogy a gráfban valóban nincs négy hosszú kör.

MEGJEGYZÉS: Az ellenőrzés befejezhető lett volna kissé egyszerűbben is: elég lett volna azt megnézni, hogy sem a 10-es, sem az 1-es, sem a 2-es pont három szomszédja közül nincs kettő, amelynek lenne további közös szomszédja.

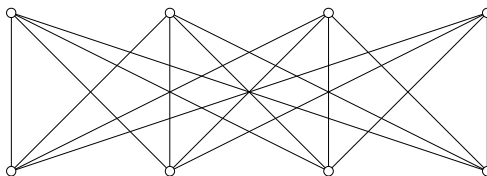
TOVÁBBI PÉLDA az úgynevezett PETERSEN-GRÁF, amelyről még sok szó lesz:



Vegyük észre, hogy ennek a gráfnak az 1,2,3,4,5 pontjai azonos szerepet játszanak (a gráf elforgatásával egymásba vihetők), továbbá a 6,7,8,9,10 pontok is. Könnyű azt is látni, hogy például az 1-es és a 6-os pont is egymásba vihető: ha a külső, 12345 kört megfeleltetjük a belső 68(10)79 körnek (ilyen sorrendben) és viszont, akkor a gráf ismét „önmagába megy át”. Tehát a Petersen-gráfban bármely pont átvihető bármely másik pontba úgy, hogy a gráf „önmagába megy át”. Ezután elég azt belátni, hogy nincs benne négy hosszú kör, amely átmenne például az 1 ponton, s ez könnyen ellenőrizhető.

8. $k=4$ -re van-e ellenpélda?

MEGOLDÁS: Vegyük a következő nyolcpontú, 4-reguláris úgynevezett teljes páros gráfot:



Ennek a gráfnak a pontjai két osztályba sorolhatók, s a két osztály között minden él be van húzva, viszont azonos osztályú pontok között nem fut él. Ekkor minden pont foka négy. Másrészt a gráfban egyáltalán nincs páratlan hosszú kör, hiszen minden körben felváltva vannak az alsó és a felső osztályba tartozó pontok. Következésképp öt hosszú kör sincs benne.

MEGJEGYZÉS: Ez a példa általánosítható minden páros k -ra: vegyük a $k+k$ pontból álló teljes páros gráfot, vagyis azt a gráfot, amelynek pontjai két k pontú osztályba sorolhatók, s a két osztály között minden él be van húzva, az azonos osztályba tartozó pontok között viszont nem fut él. Ez a gráf k -reguláris, most is igaz, hogy minden köre páros hosszúságú, mert

minden körben felváltva vannak a pontok a két osztályból. Tehát nincs benne $k+1$ hosszú kör, hiszen $k+1$ páratlan.

1. Házi feladat: Mi a helyzet páratlan k számok esetén? Van-e k -reguláris gráf, amelyben nincs $k+1$ hosszú kör?

2. Házi feladat: Van-e olyan k -reguláris gráf, amelyben csak „nagyon nagy” körök vannak, például csak $2k$ -nál hosszabb körök?

9. Egy ország bizonyos városai között repülőgép közlekedik. Minden repülőjárat oda-vissza közlekedik, és két várost köt össze. Bármely két város között vagy van közvetlen repülőjárat, vagy egy átszállással eljuthatunk egyikből a másikba. Minden városból legfeljebb három közvetlen repülőjárat indul. Hány repülőtér van maximálisan az országban (minden városban egy repülőtér van)?

Mi köze ennek a feladatnak a korábbiakhoz?

Mielőtt ezekre a kérdésekre válaszolnánk, átfogalmazzuk a feladatot gráfelméleti feladattá: a városok (repülőterek) lesznek a gráf pontjai. A feltétel szerint minden pont foka legfeljebb 3. Másrészt bármely két pont között fut él, vagy van egy 2 (él)hosszúságú út. Az ilyen gráfokat röviden *2-átmérőjű* gráfoknak nevezzük. Ezt a következő indokolja. Tegyük fel, hogy egy gráf bármely két pontja között van út. Ilyenkor a gráfot *összefüggő* gráfnak nevezzük. Összefüggő gráfban definiálható két pont távolsága: a közöttük futó legrövidebb út hosszát nevezzük a két pont $d(a,b)$ távolságának.

3. Házi feladat: Bizonyítsuk be, hogy ez a távolságdefiníció annyiból valódi „távolság”-fogalmat ad, hogy igaz a háromszög-egyenlőtlenség: vagyis ha a gráfnak vesszük három pontját, a -t, b -t és c -t, akkor az a és b pontok távolsága és a b és c pontok távolsága együtt nem kisebb az a és c pontok távolságánál: $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$.

Definiálhatjuk ezután a gráf (mint „ponthalmaz”) átmérőjét: vesszük az összes két pont közötti távolságot és ezek közül a legnagyobb a gráf átmérője. Vagyis két legtávolabbi pont távolsága lesz a gráf átmérője. Ezután a feladat a következőképpen szól:

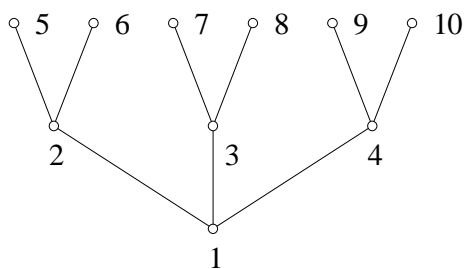
Egy egyszerű 2-átmérőjű gráfban minden pont foka legfeljebb három. Hány pontja van maximálisan?

MEGOLDÁS: Vegyük fel a gráf egy pontját, legyen ez az 1-es pont. Ennek legfeljebb három szomszédja van, legyenek ezek a 2-es, 3-as, 4-es pontok. Ez utóbbi három pontnak legfeljebb két-két további szomszédja lehet. Ez további hat pont. A gráfnak nem lehet további pontja, mert azok nem volnának az 1-es pontból két lépésben (kettő hosszú úttal) elérhetők. A gráfnak tehát legfeljebb tíz pontja van.

A kérdés az, hogy van-e tízpontú, a feladat feltételeinek megfelelő gráf. Az eddigi gondolatmenetből következik, hogy ha van ilyen gráf, abban az 1-es pont fokszáma biztosan három. De *bármely* pontját tekinthetjük az 1-es pontnak, tehát *bármely pont fokszáma három*, vagyis a gráf 3-reguláris. Másrészt az is igaz, hogy *a gráfban nem lehet három hosszú kör* (= háromszög), mert ha az a,b,c pontok egy háromszöget határoznának meg, akkor az a pontnak lenne két szomszédja, amelyek között fut él. Ha most az a pontot választjuk 1-es pontnak a fenti gondolatmenetben, b -t és c -t 2-esnek és 3-asnak, akkor e két pontból már nem indulhat további két-két ponthoz él a gráfban, tehát a gráfnak nem lehet tíz pontja. Végül az is igaz, hogy *a gráfban nem lehet négy hosszú kör* (= négyszög) *sem*. Ezt hasonlóan láthatjuk be: ha a,b,d,c

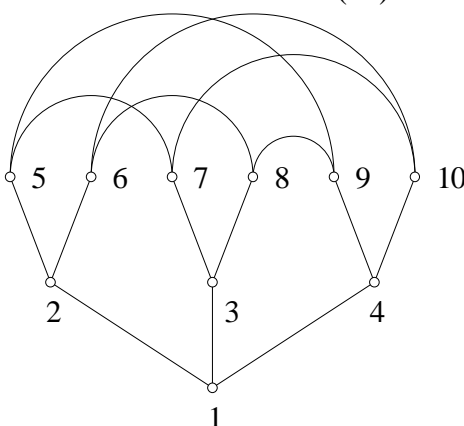
(ilyen sorrendben) egy négy hosszú kör volna, akkor válasszuk ismét a -t 1-esnek, b -t 2-esnek és c -t 3-asnak. A gráfnak csak úgy lehet tíz pontja, ha b és c (2-es és 3-as) további (1-től különböző) két-két szomszédja különböző, márpedig d mindkettőnek szomszédja. Ez lehetetlen, tehát nincs a gráfban négy hosszú kör sem.

E két állítás bizonyítását elmondhatjuk a következőképpen is. Láttuk, hogy a 2-átmérőjű, 3-reguláris gráf *bármely* pontjából elindulva a vele összekötött három pont mindegyikének két-két további, egymástól különböző szomszédja van, különben nem lehetne a gráfnak tíz pontja. Tehát bármely pont három szomszédja olyan, hogy nem fut közöttük él, ezért nincs a gráfban háromszög. Másrészt bármely pont bármely két szomszédját véve ezeknek nem lehet további közös szomszédjuk, tehát a gráfban nincs négyszög sem. Eddig a gráf tehát „bármely pontból indulva” így néz ki:



Az 1-es pont szomszédjait sorban 2,3,4-gyel jelöljük, a 2-es pont további két szomszédját 5-tel és 6-tal, a 3-as pontét 7-tel és 8-cal, a 4-es pontét 9-cel és 10-zel (a felső szinten álló pontok nagyság szerint növekvő sorrendben vannak számozva).

Minden további élnek tehát a felső szint pontjai között kell futnia. Azt is tudjuk, hogy az 56, 78 és 910 élek nem szerepelhetnek a gráfban, mert akkor lenne háromszög. Az 5-ös pont a 7-es és a 8-as közül legfeljebb az egyikkel lehet összekötve, mert különben 5728 egy négyhosszúságú kör volna. Hasonló okokból a 9-es és 10-es közül is legfeljebb az egyikkel lehet összekötve. Másrészt az 5-ös pontból még két élnek kell kiindulnia. Tehát szimmetria okokból feltehetjük, hogy a 7-essel és a 9-essel van összekötve. A 7-es nem lehet összekötve a 9-essel, mert akkor 579 háromszög volna, nem lehet összekötve a 8-assal (378 háromszög volna), és nem lehet összekötve 6-ossal (7625 négyszög volna). Tehát 7 csak 10-zel lehet összekötve. Ugyanígy 9 csak a 8-assal lehet összekötve, 10 csak a 6-ossal és 8 is csak a 6-ossal lehet összekötve. Vagyis a felső szinten az 68957(10) kört kaptuk.



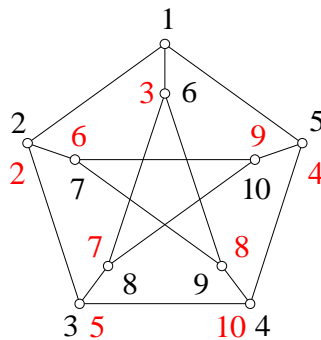
Azt is megkaptuk, hogy *bármely tízpontú 3-reguláris, 2-átmérőjű gráf felrajzolható így*, tehát lényegében csak egy tízpontú megfelelő gráf van. Ez „lényegében” azt jelenti, hogy bármely tízpontú, 3-reguláris, 2-átmérőjű gráf pontjai átszámozhatók úgy, hogy a fenti gráfot kapjuk. A kapott gráfról a következőket tudjuk: 3-reguláris, 2-átmérőjű, tízpontú, nincs benne háromszög és négyszög, és hogy csak egy ilyen gráf van. Mármost könnyen belátható a következő:

10. A Petersen-gráf is 2-átmérőjű.

BIZONYÍTÁS: Már láttuk, hogy a Petersen-gráf bármely két pontja egymásba vihető úgy, hogy a gráf önmagába menjen át. Ezért elég azt megmutatnunk, hogy az 1-es pontból bármely másik pontba el lehet jutni egy vagy két lépésben. Egy lépésben elérhető a 2,5,6 pontok. A 2-ből egy további lépéssel elérhető a 3 és a 7 pont, az 5 pontból a 4 és a 10, a 6-ból a 8 és a 9. Vagyis valóban minden pont legfeljebb kettő távolságra van 1-től, s így bármely két pont távolsága legfeljebb kettő.

11. Számozzuk át a Petersen-gráf pontjait, hogy éppen ezt a gráfot kapjuk!

MEGOLDÁS:



12. Állapítsuk meg, hogy hányféleképpen lehet a Petersen-gráfot (vagy eredeti formáját, vagy a most kapottat, mindegy) átszámozni úgy, hogy önmagába menjen át.

MEGOLDÁS: Első pillanatra úgy látszik, hogy $10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ -féleképpen lehet átszámozni. Hiszen a legalsó pontot a tíz pont közül bármelyiknek választhatjuk. Ezután a középső szintre a legalsó pont három szomszédja kerül, ezek viszont bármilyen sorrendben, ez eddig $10 \cdot 6$ lehetőség. Most a felső szintre a középső szint bármelyik pontjának két-két szomszédját kell tennünk, a nekik megfelelő sorrendben, de mindegyik ilyen pontpárt kétféle sorrendben rajzolhatjuk, s ez összesen $10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ lehetőség. Csakhogy a felső szinttel vigyázni kell, ha *ugyanazt* a gráfot akarjuk kapni, tehát a felső szinten *ugyanilyen* hatszöget akarunk kapni. A 2-es pontnak megfelelő pont fölé annak két szomszédját még olyan sorrendben rajzoljuk, ahogyan akarjuk, de ezután már nincs több szabadságunk: 3-asnak megfelelő pont fölé a két pontot már úgy kell rajzolnunk, hogy az első az 5-ösnek megfelelővel legyen összekötve, a második a 6-osnak megfelelővel. Ugyanígy a 4-esnek megfelelő pont fölé is úgy kell a két pontot rajzolnunk, hogy a 9-esnek megfelelő pont legyen összekötve az 5-ösnek megfelelővel. Ez tehát csak $10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$ lehetőség. Ennyi úgynevezett „automorfizmusa” van a Petersen-gráfnak.

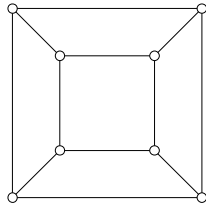
4. Házi feladat: Most ideiktatok pár egyszerűbb gráfot, amelynél ugyanígy azt kell kiszámolni, hogy hányféleképpen vihető át önmagába (hány „automorfizmusa” van – zárójelben a végeredmény, hogy mindenki ellenőrizhesse magát):

A háromszög ($6=3!$);

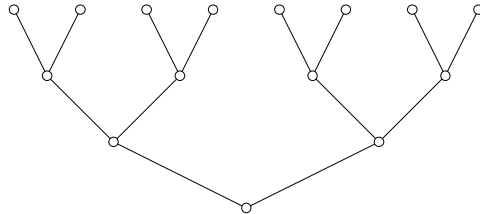
A négyszög ($8=4 \cdot 2$);

A négyszög egy átlóval: vagyis minden él be van húzva egy kivétellel (4);

A következő gráf ($48=8 \cdot 3!$):



Egy öt hosszú út, illetve bármely út. (2)
Egy három emelet magas bináris fa (2^7):



1. (házi feladat volt): Van-e korlátos síkbeli halmaz, amely egybevágó egy valódi részhalmazával?

MEGOLDÁS: Múltkor láttunk olyan síkbeli halmast, amely megszámlálhatóan végtelen és egybevágó egy valódi részhalmazával, ilyen volt például az x tengely pozitív egész rácspontjainak halmaza. Ez azonban még nem korlátos. Az az egybevágósági transzformáció, amely ezt az alakzatot önmaga valódi részébe viszi, egy eltolás. Nyilvánvaló, hogy ha egy halmast egy eltolás saját részébe viszi, akkor a halmaz nem lehet korlátos: vegyük ugyanis egy P pontját, ennek eltoltja, P_1 szintén eleme a halmaznak, de akkor P_1 eltoltja, P_2 is, ennek eltoltja is, és a PP_1 vektor megegyezik a P_1P_2 vektorral. Ugyanígy ha már P_i -ről tudjuk, hogy a halmazban van, akkor eltoltja P_iP_{i+1} is, és P_iP_{i+1} vektor is egyezik a PP_1 vektorral. Tehát P minden nPP_1 -gyel való eltoltja (n pozitív egész) eleme a halmaznak, s ezek a pontok nem korlátos halmast alkotnak. Tehát az eltolás helyett más egybevágósági transzformációt kell keresnünk. Körüljárásstartó egybevágósági transzformáció már csak egy van: a forgatás. Ennek megvan az az előnye is, hogy ha egy P pontot egy O pont körül mindig ugyanazzal az α szöggel elforgatunk, akkor is korlátos halmast kapunk. Ennek alapján már majdnem kész is vagyunk: vegyünk egy P pontot és összes O körüli α szögű elforgatottját: ezek a P_i pontok alkossák halmazunkat, P_i $i\alpha$ szöggel való elforgatottja P -nek. Ha most ezt a halmast α szöggel elforgatjuk, akkor maga P a P_1 pontba megy át és általában P_i a P_{i+1} -be, tehát a halmaz egy valódi részhalmazába, abba, amelyet P elhagyásával kapunk. Ezzel kész is – lennénk, ha garantálni tudnánk, hogy P nem szerepel a későbbi P_i -k között, és ha garantálni tudnánk, hogy a P_i -k halmaza valóban végtelen: nincs ismétlődés! Mindkettőt akkor tudjuk garantálni, ha a P_i -k halmaza nem periodikus, tehát ha az α szög fokban mérve nem osztható 360° -kal, vagyis ha α fokban mérve irracionális. Ekkor valóban végtelen halmast kapunk és az elforgatottak halmazából kiesik P . Ezzel a feladatot megoldottuk.

2. (szintén házi feladat volt): Legyen a irracionális szám és tekintsük az $y = ax$ egyenest. Ezen az origón kívül nyilván nincs több rácspont. Bizonyítsuk be, hogy viszont tetszőlegesen közel hozzá van rácspont.

MEGOLDÁS: Ha n egész, akkor az $x=n$ függőleges egyenesen az $y=ax$ egyeneshez legközelebbi rácspont vagy az $(n, [an])$ vagy az $(n, [an]+1)$ koordinátájú pont. Ennek távolsága az egyenes (n, an) pontjától αn „kisebbik törtrésze”, vagyis az αn -hez legközelebbi egésztől való eltérése. Az $y=ax$ egyenestől vett távolság ennél még kisebb. (Lásd az ábrát!) A múltkor bizonyítottuk, hogy bármely α irracionális számhoz végtelen sok olyan q pozitív egész van, amelyhez van olyan n egész, amelyre $|n\alpha - p| < 1/n$, ez éppen azt jelenti, hogy a legközelebbi egésztől vett eltérése kisebb, mint $1/n$. S miután ez végtelen sok n -re teljesül, ez az $1/n$ tetszőlegesen kicsivé teheti.

Most visszatérünk a gráfelméleti házi feladatokhoz.

3. (még a végtelen gráfokról szóló szakkörrel maradt házi feladat): Bizonyítsuk be, hogy ha egy megszámlálhatóan végtelen fa minden emeletén véges sok pont van, akkor van benne végtelen hosszú út. (Ez az úgynevezett „König-lemma.”)

A **MEGOLDÁS**hoz előbb egy másik feladatot veszünk, amelynek gondolatmenete közelebb vihet a megoldáshoz:

4. Bizonyítsuk be, hogy egy végtelen gráfban vagy van végtelen sok pont, amelyek között nem fut él, vagy van végtelen sok pont, amelyek teljes részgráfot alkotnak, tehát köztük minden él be van húzva.

MEGJEGYZÉS: Ezt nevezik a „végtelen Ramsey-tétel” legegyszerűbb esetének.

MEGOLDÁS: Vegyük a gráf egy pontját, legyen ez x_1 . Ha x_1 -ből a gráf végtelen sok pontjába fut él, akkor hagyjuk el azokat a pontokat, amelyekbe x_1 -ből nem fut él. Ha viszont csak véges sok pontba fut él x_1 -ből, akkor ezeket a pontokat hagyjuk el. A megmaradó pontok halmazát nevezzük Y_1 -nek. Ha x_1 ezek mindegyikével össze van kötve (1. eset), akkor x_1 pontot jelöljük meg egy + jellel. Ha x_1 az Y_1 egyetlen pontjával sincs összekötve (2. eset), akkor x_1 -et jelöljük meg egy – jellel. Ezután az Y_1 halmazból kiválasztunk egy x_2 pontot és azzal megcsináljuk ugyanezt: ha x_2 az Y_1 halmaz végtelen sok pontjával van összekötve, akkor Y_1 többi pontját elhagyjuk, a maradó pontok halmaza (x_2 nélkül!) Y_2 , és x_2 -re egy + jelet írunk. Ha x_2 az Y_1 halmaznak csak véges sok pontjával van összekötve, akkor ezeket hagyjuk el, a maradó pontok halmaza (x_2 nélkül!) lesz Y_2 , és x_2 -re egy – jelet írunk. Az Y_2 halmaz mindkét esetben végtelen és minden pontja „ugyanúgy viselkedik” x_2 -vel és „ugyanúgy viselkedik” x_1 -gyel (hogy hogyan azt az e két pontra írt jel „mondja meg”). Ezután minden lépésben ugyanezt csináljuk: ha az Y_i végtelen halmaz már ki van választva, akkor abból kiválasztunk egy x_{i+1} pontot, és megnézzük, hogy az Y_i halmaznak végtelen sok pontjával van-e összekötve. Ha igen, akkor ezek a pontok alkotják Y_{i+1} -et és x_{i+1} -re egy + jelet írunk. Ha nem, akkor elhagyjuk azt a véges sok pontot, amellyel össze van kötve, a maradó végtelen ponthalmaz lesz Y_{i+1} . Az így kiválasztott Y_{i+1} halmazról tudjuk, hogy bármely korábban választott x_j ponttal „egyöntetűen viselkedik”: ha x_j -n + jel áll, akkor x_j minden Y_{i+1} -beli ponttal össze van kötve, ha – jel áll rajta, akkor egygel sincs összekötve.

Az így kiválasztott $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ végtelen ponthalmazról is ugyanezt tudjuk: ha x_i -n + jel áll, akkor minden nagyobb indexű x_j -vel össze van kötve (mert azok mind Y_i -ből valók), ha – jel áll rajta, akkor egyikükkel sincs összekötve.

Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ végtelen ponthalmaz végtelen sok pontjára van + írva és hagyjuk el a többi pontot. Így kapunk egy olyan végtelen ponthalmazt, amelynek bármely két pontja össze van kötve.

Ha az $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ végtelen ponthalmaznak csak véges sok pontján szerepel a + jel, akkor ezeket a pontokat hagyjuk el. A többin a – jel áll, tehát ezek közül semelyik kettő között nem fut él. Ilyen pontból most végtelen sok van.

A tételt ezzel bebizonyítottuk.

Mielőtt visszatérnénk a 3. feladatra, ennek a tételnek egy nevezetes következményét bizonyítjuk be:

5. TÉTEL Minden végtelen sorozatnak van végtelen szigorúan monoton növő vagy végtelen monoton csökkenő részsorozata.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük ugyanis azt a gráfot, amelynek pontjai az eredeti sorozat elemei és két pont akkor legyen összekötve, ha a két elem között „szigorúan monoton növekedési” reláció van, azaz a kisebb indexű elem kisebb a nagyobb indexűnél. (Ha a kisebb indexű elem egyenlő vagy nagyobb a nagyobb indexűnél, akkor nincs közöttük él.)

Az előbb bizonyított tétel szerint két eset van: ebben a gráfban van végtelen üres (feszített) részgráf, vagyis végtelen sok olyan pont, amelyek közül semelyik kettő nincs összekötve. Ekkor a sorozat megfelelő elemei monoton csökkenő (rész)sorozatot alkotnak;

van végtelen teljes részgráf, vagyis végtelen sok olyan pont, amelyek közül bármely kettő össze van kötve. Ekkor a sorozat megfelelő elemei szigorúan monoton növekvő (rész)sorozatot alkotnak.

3. Most visszatérünk a végtelen fáról szóló tételre:

Vegyük a fa gyökerét, s jelöljük x_0 -lal: x_0 -ból indul ki akármilyen hosszú út (ami még nem jelent automatikusan végtelen hosszú utat is: erre láttunk példát a „tigrises” feladatban). Ellenkező esetben a fa magassága véges volna, s miután minden szintjén is csak véges sok elem van, a fa is véges volna.

Most tekintsük az első emeletet. Lehet-e, hogy ennek az emeletnek egyetlen pontjából sem indul ki akármilyen hosszú út? Ha ez volna a helyzet, akkor mindegyik pontjából csak véges magasságba lehet eljutni. De az emeleten véges sok pont van, tehát közülük van egy, amelyről a legmagasabbra lehet eljutni, s ez még mindig véges magasság volna. Megint azt kapnánk, hogy a fa véges. Van tehát legalább egy olyan pont, amelyről akármilyen magasra el lehet jutni. Válasszunk ki egy ilyet, legyen ez x_1 . Az előbb bizonyítottakat alkalmazhatjuk x_1 a második emeleten levő szomszédjaira is, ezek között is lesz egy x_2 pont, amelyből indul akármilyen hosszú út. Valójában ugyanis azt bizonyítottuk be, hogy ha egy x_i pontból akármilyen hosszú út indul ki, akkor a fabeli „fiai” között (tehát a következő emeleten levő szomszédjai között) is van legalább egy ilyen x_{i+1} pont. Ezzel kiválasztottunk x_i -knek egy végtelen sorozatát, amelyekről tudjuk, hogy mindegyikükből indul ki akármilyen hosszú út és minden x_{i+1} össze van kötve x_i -vel, a közvetlen előtte levővel. Valójában már csak erre a tulajdonságukra van szükségünk: ez bizonyítja ugyanis, hogy a kiválasztott x_i -k egy végtelen hosszú utat alkotnak a fában.

Ezzel a König-lemma bizonyítását befejeztük.

Egyik korábbi szakkörön beláttuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor van benne kör és ha minden pont foka legalább k , akkor van benne legalább $k+1$ hosszú kör. Akkor volt házi feladat a következő:

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább három, akkor van a gráfban kör átlóval. (Átlón olyan élt értünk, amely a kör két pontját köti össze.)

MEGOLDÁS: Ugyanúgy járunk el, mint az említett feladatokban: vesszük a leghosszabb utat vagy azok egyikét, legyen ez P . Ennek x végpontjából még legalább két él indul ki, és ezek csak magába az útba mehetnek vissza, hiszen különben folytatható volna az út. Legyen y az x -től távolabbi, z a(z egyik) x -hez (y -nál) közelebbi. Ha a P útnak az x -ből y -ba vezető részét lezárjuk az xy éllel, akkor egy olyan kört kapunk, amelynek van átlója: xz .

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább három, akkor a körök hosszainak legnagyobb közös osztója vagy egy vagy kettő. Lehet-e egy? Lehet-e kettő?

MEGOLDÁS: Ha minden pont foka legalább három, akkor az előző feladat szerint van egy kör átlóval. Az átló két kisebb körre bontja a nagy kört, ha ezek hossza a és b , akkor a nagy kör hossza $a+b-2$ (a nagy kör minden élét pontosan egyszer számoltuk, viszont az átlót is megszámláltuk kétszer). Legyen d a a gráf körhosszainak legnagyobb közös osztója. Mivel $d|a$ és $d|b$, így $d|(a+b)$. Másrészt $d|(a+b)-2$, így $d|(a+b)-(a+b-2)=2$. Vagyis a legnagyobb közös osztó valóban csak egy vagy kettő lehet. A teljes n -szögben $n>3$ esetén van háromszög és négyszög, itt a legnagyobb közös osztó egy. Másrészt a „három ház $n-3$ kút” gráfban (tehát abban a teljes páros gráfban, amelynek két osztálya van, az egyik osztályban három pont van,

a másikban $n-3$ és a különböző osztályok között minden élt behúznak) csak páros hosszúságú körök vannak, másrészt vannak négy- és hatszögei, így itt a közös osztó kettő.