2006. szeptember 22.

A szakkör elején felírtam a táblára a 7. és 8. feladatokat. Ezek közel olimpiai nehézségűek. Utána következtek az év eleji bemelegítő kisebb feladatok (1-6), ezeken dolgoztunk és megbeszéltük őket. A szakkör végén oldottuk meg az elején kitűzött két nehezebb példát (7-8).

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok egész megoldása van a következő egyenletnek:
$x^2+y^2-z^2=1997$.

2. Az ABCD négyzet BC oldalának pontja K. A $KAD\angle$ szögfelezője a CD oldalt M-ben metszi. Igazoljuk, hogy AK=DM+BK.

3. Örzse, Erzsi és Rezső szavakat írtak a füzetükbe, Örzse írta a legtöbbet, Erzsi a legkevesebbet. A szavakért pontokat kaptak. Ha egy szót csak egy valaki írt, azért két pontot kapott. Ha egy szót ketten is leírtak, azért mindketten egy-egy pontot kaptak. A mindhármuk által leírt szavakért nem járt pont. Lehetséges-e, hogy Erzsinek lett a legtöbb pontja és Örzsének a legkevesebb?

4. Két kör metszi egymást az A és B pontokban. Egy közös érintőjük az elsőt C-ben, a másodikat D-ben érinti, $CBD\angle > CAD\angle$. A CB egyenes a második kört még E-ben is metszi. Igazoljuk, hogy $CAE\angle$ szögfelezője AD.

5. Minden négyjegyű számnál tekintsük számjegyeinek szorzatát. Mennyi ezeknek a szorzatoknak az összege?

6. Egy O csúcsú szög egy-egy szárán találhatóak az AB és CD szakaszok, az A pont O és B között, a C pont O és D között van. Az AD és BC szakaszok felezőpontjain áthaladó egyenes AB-t M-ben, CD-t N-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy
$\frac{OM}{ON}=\frac{AB}{CD}$.

7. Egy kocka lapjait fehérre és feketére festettük. Van egy sakktáblánk, amelynek mezői éppen akkorák, mint a kocka egy lapja. A kockát a sakktábla egy mezőjére helyezzük, majd végiggörgetjük a táblán úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer kerüljön. Lehetséges-e, hogy minden alkalommal a kockán levő alsó mező színe megegyezzen a sakktábla éppen alatta levő mezőjének színével?

8. Egy szög szárait érinti az O középpontú kör. Az egyik szögszárra tükrözzük O-t, így kapjuk az A pontot. A körhöz A-ból húzott érintők a szög másik szárát B és C pontokban metszik. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög köréírt körének középpontja az eredetileg adott szög szögfelezőjén van.

Házi feladat:

9. Egy szabályos háromszögre oldalaival párhuzamos egyeneseket rajzolunk, amelyek az oldalakat 10 egyenlő részre, a háromszöget pedig 100 egybevágó kis háromszögre osztják. Megrajzoljuk még a háromszög oldalegyeneseit is. Két szomszédos párhuzamos közötti részt nevezzük sávnak. Legfeljebb hány kis háromszög jelölhető ki úgy, hogy semely két kiválasztott se essen egy sávba?

2006. október 5.

Ezt a szakkört Kós Géza tartotta.

1. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ különböző valós számok.
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j\neq i}\left(1+\frac{1}{x_i-x_j}\right)=?$$

2. Mutassuk meg, hogy ha $x,y>1$, akkor

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $0\leq x,y\leq 1$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

4. Igazoljuk, hogy ha $a,b,c>0$, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

5. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számokra

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}=1.$$

Bizonyítsuk be, hogy $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n\geq (n-1)^n$.

6. Bizonyítsuk be, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ különböző pozitív egészek, akkor

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n}{n^2}\geq \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

7. Az a,b,c pozitív valós számok reciprokainak összege 1. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\geq \sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

8. Egy háromszög oldalai a,b,c. Mutassuk meg, hogy

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

9. Legyen k pozitív valós szám, n pozitív egész. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x_1|x_1|=x_2|x_2|+(x_1-k)|x_1-k|$$
$$x_2|x_2|=x_3|x_3|+(x_2-k)|x_2-k|$$
$$\ldots.$$
$$x_n|x_n|=x_1|x_1|+(x_n-k)|x_n-k|.$$

2006. október 20.

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok egész megoldása van a következő egyenletnek:
   $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=6$.

2. Hat dobókockát kifúrtunk egy-egy szemköztes lapjuk középpontján át, majd egy rudat dugtunk a lyukakon át. Minden kocka szabadon forgatható a rúdon. Igazoljuk, hogy a kockákat beforgathatjuk úgy, hogy egy asztalra helyezve a legfelső lapok számai által alkotott hatjegyű szám osztható legyen héttel. (A kockák 1-től 6-ig számozottak, a szemköztes lapokon a számok összege 7.)

3. Összeszorozzuk az összes különböző olyan számot, melyet az alábbi kifejezésből kaphatunk, az előjelek lehetséges kiválasztásaival:

$\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\ldots\pm\sqrt{100}$.
Bizonyítsuk be, hogy az eredmény négyzetszám.

4. Egy 8×8-as sakktábla minden mezőjét valamilyen színnel kifestettük úgy, hogy minden mezőnek legalább két oldalszomszédja vele azonos színű. Legfeljebb hány színt használhattunk fel?

5. Legyenek a, b, c valós számok. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget:
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

6. Egy egységoldalú négyzetet téglalapokra vágtunk. Minden téglalapnak tekintjük a rövidebb oldalát, ha téglalapunk egy kis négyzet volt, annak az oldalát. Bizonyítsuk be, hogy ezek összege legalább 1.

Házi feladat:

7. Az *ABCD* konvex négyszög belső pontja *M*, *AM=MB* és *CM=MD*, továbbá $AMB\angle = CMD\angle = 120^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan *N* pont, amelyre *BNC* és *DNA* szabályosak.

8. Egy énekversenyen 8 énekes vett részt. Összesen *d* dalt énekeltek, mindegyiket négyen adták elő és bármely két énekes ugyanannyi dalt adott elő közösen. Mi a legkisebb *d*, amire ez lehetséges?

2006. november 10.

1. Adott két pozitív egész *m* és *n*. Nevezzünk egy sakkfigurát (*n*,*m*)-krokodilnak, ez *n* mezőt lép vízszintesen, vagy függőlegesen, majd *m* mezőt erre merőleges irányban. Bizonyítsuk be, hogy egy végtelen sakktábla kiszínezhető fehérre és feketére úgy, hogy a figura minden lépése során az indulómezőtől különböző színű mezőre lép.

2. Adott két ugyanakkora kör. Húzunk a középpontjaikat összekötő egyenessel egy párhuzamos *AB* szakaszt úgy, hogy az *A* és *B* között messe a köröket. *A*-ből érintőket húzunk a hozzá közelebbi körhöz, ugyanígy *B*-ből érintőket húzunk a hozzá közelebbi körhöz. Kiderült, hogy a négy érintő alkotta négyszög tartalmazza mindkét kört. Igazoljuk, hogy az érintők alkotta négyszögbe kör írható.

3. Van 20 gyöngyünk, 10 féle színben, minden színből éppen kettő van. Beletettük a gyöngyöket 10 dobozba kettesével úgy, hogy kiválasztható minden dobozból egy-egy gyöngy, hogy mind a tíz szín előforduljon a kiválasztottak között. Igazoljuk, hogy az ilyen kiválasztások száma 1-nél nagyobb kettőhatvány.

4. Az *ABC* háromszög beírt köre az *AB* és *AC* oldalakat rendre a *P*, *Q* pontokban érinti. Az *AC* és *BC* oldalak felezőpontjai rendre *R* és *S*. A *PQ* és *RS* egyenesek metszéspontja *T*. Bizonyítsuk be, hogy *BT* felezi az *ABC*∠ szöget.

5. Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek hosszát összeadjuk és ezt nevezzük a téglatest méretének. Lehetséges-e, hogy egy téglatest tartalmaz egy önmagánál nagyobb méretű téglatestet? 6. Egy fekete egységoldalú szabályos háromszög van a síkon. Hogyan helyezhető el 9 egységoldalú szabályos háromszög úgy, hogy ezek ne fedjék egymást és mindegyik letakarja a fekete háromszög valamely belső pontját?

2006. november 24.

A szakkörön a 93-94-es tanév OKTV feladatai közül oldottunk meg néhányat.

1. Egy egység oldalú négyzetben két kör helyezkedik el, amelyeknek nincs közös belső pontja (egymást kívülről, ill. a négyzet határát belülről érinthetik). Mennyi a kerületük összegének a lehető legnagyobb értéke?

2. Hány olyan legfeljebb 10-jegyü pozitív egész szám van, amely osztható négyzetgyökének (alsó) egészrészével? (Pl. a 12 ilyen, mert $\lfloor\sqrt{12}\rfloor = 3$ osztója a 12-nek, de a 22 nem ilyen, mert $\lfloor\sqrt{22}\rfloor = 4$ nem osztója a 22-nek.)

3. Eszternek és Zsófinak 3−3 forintja van. Egy szabályos érmével dobálnak, fej esetén Eszter kap Zsófitól 1forintot, írás esetén pedig Zsófi kap Esztertől 1 forintot. Addig játszanak, amíg valamelyikük pénze elfogy. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább 100 dobásra sor kerül?

4. Legyen *f* olyan nemkonstans valós együtthatós polinom, amellyel minden *x*, *y* valós számra
$$f(x)f(y) \le f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
teljesül. Mutassuk meg, hogy *f*-nek pontosan egy valós gyöke van.

5. Egy 1993 szögpontú teljes gráf minden élét színezzük úgy, hogy semelyik csúcsba sem fut két azonos színű él. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van 17 olyan pont, amelyek közül bármelyik kettőt különböző színű él köt össze.

6. Tekintsük az 1994 dimenziós vektorokat, azaz azokat az (a_1 ,a_2 ,...,a_{1994}) szám-1994-eseket, ahol az a_i ,,koordináták" tetszőleges valós számok. Nevezzünk egy ilyen vektort ,,bumfordi"-nak, ha a koordinátái között legfeljebb két különböző érték fordul elő (azaz például minden koordinátája −1 vagy $\sqrt{2}$). Legkevesebb hány bumfordi vektor összegeként állítható elő az (1, 2, ..., 1994) ? (A vektorok összeadását koordinátánként értelmezzük, azaz két vektort úgy adunk össze, hogy a megfelelő koordinátákat összeadjuk.)

7. Egy tetszőleges *m* pozitív egészhez vegyünk minden lehetséges módon olyan $a_1 < a_2 < \dots < a_t$ egészeket, amelyekre $a_1 = m$ és az $a_1 a_2 \dots a_t$ szorzat négyzetszám (t=1 is megengedett). Jelöljük $S(m)$-mel a_t lehető legkisebb értékét. Például $S(1)=1$, $S(2)=6$ mert $m=2$ esetén a 2×3×6 szorzat a legjobb választás, $S(3)=8$, $S(4)=4$ stb. Bizonyítsuk be, hogy az $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$, … sorozatban éppen a pozitív összetett számok szerepelnek, éspedig mindegyik pontosan egyszer fordul elő.

2006. december 15.

1. 1. Bizonyítsuk be, hogy bármely *a,b,c* pozitív egészre $(a;b)(a;c)[b;c]$ osztója *abc*-nek.

2. Legyenek x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy
$$M = \frac{x_1}{x_2+2x_3+3x_4+4x_5} +$$
$$+\frac{x_2}{x_3+2x_4+3x_5+4x_1}+\frac{x_3}{x_4+2x_5+3x_1+4x_2}+\frac{x_4}{x_5+2x_1+3x_2+4x_3}+\frac{x_5}{x_1+2x_2+3x_3+4x_4} \ge \frac{1}{2}$$

3. Adott N és k pozitív egészekre megszámoltuk, hogy az N számot hányféleképpen lehet felírni $a+b+c$ alakban, ahol $1\le a,b,c\le k$, és az összeadandók sorrendje is számít. Kaphattunk-e eredményül 2006-ot?

4. Egy nem szabályos háromszög köréírt körének középpontja O, az oldalegyeneseket érintő körök középpontjai: A_1, A_2, A_3, A_4. Bizonyítsuk be, hogy az A_i, A_j, A_k pontok OA_n egyenestől mért előjeles távplságainak az összege nullával egyenlő; (i,j,k,n az 1,2,3,4 számok tetszőleges permutációját jelentik. Két pontnak egy egyenestől mért távolsága akkor azonos előjelű, ha az egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak.)

5. Bálint 200 Ft-ot fizet Annának, ha a lottón a kihúzott számok szorzatának utolsó számjegye 0 lesz, különben Anna fizet Bálintnak 300 Ft-ot. Hosszabb távon kinek előnyös ez a megállapodás?

6. Jelölje k(n) az n pozitív egész legnagyobb páratlan osztóját és legyen A(n)=k(1)+k(2)+.....+k(n), B(n)=1+2+....+n. Mutassuk meg, hogy a 3A(n)=2B(n) egyenlőség végtelen sok n-re teljesül.

2007 január 12.

Ezt a szakkört Hraskó Andráas és Pataki János vezette.

1. Az 1, 2, …, N számok mindegyike piros, vagy zöld. Egyszerre három szám színét megváltoztathatjuk, ha számtani sorozatot alkotnak. Mely N-re érhető el bármilyen színezésről indulva, hogy minden szám piros legyen?

2. 10!-nak legfeljebb hány osztója adható meg úgy, hogy közülük semely néhány szorzata ne legyen négyzetszám?

3. Egy k elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg melyekben az elemek száma nem osztható 7-tel, de bármelyik két különböző metszete osztható 7-tel?

2007. január 26.

Korábbi évek olimpiai feladatait oldottuk meg: 1997/1; 1998/1; 1998/2; 1998/4 (Az eddigi olimpiák feladatainak és megoldásainak egyik jó forrása: http://www.kalva.demon.co.uk/imo.html Általánosabb olimpiai oldal: http://imo.math.ca/)

2007. március 9.

Az OKTV döntő és a válogatóverseny feladatait oldottuk meg.
Válogatóverseny feladatai:

1. Az $ABCD$ trapézban $AB\|CD$, $AB>CD$. Legyenek K és L rendre az AB és CD szakaszokon úgy, hogy $AK/KB=DL/LC$. A KL szakasz P és Q pontjára teljesül, hogy $APB\angle = BCD\angle$ és $CQD\angle = ABC\angle$. Bizonyítsuk be, hogy $PQBC$ húrnégyszög.

2. A $P_1P_2...P_n$ szabályos n szög oldalaira és átlóira ráírunk egy-egy pozitív egész számot, ezek közül a legnagyobb legyen r. A számozás során az 1, 2, …, r számok mindegyikét legalább egyszer felhasználtuk. Bármely $P_iP_jP_k$ háromszög oldalai közül kettőn ugyanaz a szám áll, a harmadikon pedig egy kisebb. Határozzuk meg r legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét.

3. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám van, amire $2^n + 3^n$ osztható n^2 -tel.

OKTV döntő II. kategória:

OKTV döntő III. kategória:

2007. március 23.

1. Jelölje A(n) az első n darab prímszám összegét. Bizonyítsuk be, hogy A(n) és A(n+1) között mindig van négyzetszám.

2. Az ABC háromszög beírt körének sugara legyen egységnyi. Jelölje r_a az AB és AC oldalakat, valamint a háromszög köréírt körét belülről érintő kör sugarát; hasonlóan értelmezzük az r_b és r_c sugarakat is. Határozzuk meg $r_a+r_b+r_c$ minimumát.

3. Mutassuk meg, hogy minden k poz. egészhez létezik olyan k-jegyű poz egész, mely osztható jegyeinek összegével, de jegyei között nem szerepel a 0.

4. Határozzuk meg $\sum_{i<j} x_i x_j (x_i + x_j)$ maximumát, ahol az x_i –k nemnegatív számok és összegük 1-gyel egyenlő.