**NA/6.** A távoli űrben egyenlő nagyságú gömb alakú bolygók vannak. Minden bolygó felszínén tekintsük azt ponthalmazt, melyben azok a pontok vannak, melyek semelyik másik bolygóról nem láthatóak. Bizonyítsuk be, hogy eme ponthalmazok területének az összege megegyezik egy bolygó felületének területével.

**NB/5.** Egy végtelen négyzetrács véges sok mezőjére elhelyezünk egy-egy játékautót. Minden autó az őt tartalmazó mező egyik oldala felé néz. Minden autó előtt közvetlenül üres mező van, továbbá nincs olyan autó, amivel van szemben autó a sorában/oszlopában (pl ha egy autó jobbra néz, akkor nincs tőle jobbra a sorában olyan autó, ami balra néz). Egy lépés során egy autót előre tolhatunk az előtte lévő mezőbe, ha az üres. Bizonyítsuk be, hogy van egy olyan végtelen hosszú lépéssorozat, amely során minden autót végtelenszer mozgattunk.

**WP/3.** Egy $100 \times 100$-as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab $1 \times 2$-es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le.

**DM/2.** Mely $n \geq 2$ egészekre racionális és melyekre irracionális

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{n^p},$$

ahol $\mathbb{P}$ a prímszámok halmaza?

**SZJ/6.** A $(0, 1, \sqrt{2})$ számhármasból kiindulva a következő lépést végezzük el többször egymás után: kiválasztjuk az egyik számot és hozzáadjuk a másik két szám különbségének egy tetszőleges racionális többszörösét. El tudjuk-e érni ilyen lépések sorozatával a $(0, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ számhármast?

**BB/4.** Döntsük el bizonyítással, hogy 1975 pont egy egység sugarú kör kerületén letehető-e úgy, hogy bármely kettő távolsága racionális.

**RB/1.** Legyen $a \circ t = \frac{a+t}{1+at}$. Legyen továbbá $q_n = ((2 \circ 3) \circ 4)...) \circ n$. Mekkora $q_{2022}$?

**NM/3.** 100 rabot a következő próba elé állítanak: Egy üres szobába hívják be őket egyesével, ahol van egy tábla, kezdetben a 0 számmal, és két doboz, $A$ és $B$, mindkettőben egy egész szám 1 és 5000 között, melyek nem egyenlőek. Mikor egy rab bemegy, elolvassa a táblán lévő számot, kinyitja ez egyik (általa választott) dobozt, megnézi a benne lévő számot, majd kicserélheti a táblán lévő számot egy egészre 1 és $X$ között. Ezután dönthet úgy, hogy tippel, melyik dobozban van a nagyobb szám. Ha eltalálja, a rabok nyernek, különben veszítenek. Ha senki nem tippel, a rabok szintén veszítenek. Adjunk biztos nyerő stratégiát a raboknak, ha...

**a)** $X = 60$

**b)** $X = 26$

**c)** $X = 22$

**FD/7.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges valós szamok esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + ... + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1-a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1-a_1)^2} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}$$

**SSzM/4.** Nevezzünk egy $(m, n)$ rácspontot láthatónak, ha $m$ és $n$ relatív prímek. Létezik-e olyan $100 \times 100$ egymás melletti rácspontokból álló négyzet, hogy egyik sem látható?