A Fazekas SpecMat Matektábor legérdekesebb feladatai

Dunabogdány, 2020. szeptember 21-25., szerkesztette: Hujter Bálint

VERZIÓ: 2021. JÚLIUS 13. 10:07

A következőkben egy összeállítás olvasható a tábor legérdekesebb feladataiból és megoldásaiból. A feladatokat a nemzetközi versenyeken szokásos kategorizálás szerint csoportosítottam. A feladatoknál jeleztem, hogy melyik diák hozta a táborba, és ki írta le az itt szereplő megoldást.

Tartalomjegyzék

1. Algebra

1. feladat (Móricz Réka)
Száz szám összege 0. Bizonyítsuk be, hogy a közülük kiválasztható számpárok között legalább 99 olyan van, amelyben a két tag összege nem negatív.

1. megoldás (Velich Nóra, Várkonyi Zsombor). Rendezzük a számokat növekvő sorrendbe:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{100}.$$

Vizsgáljuk először meg, hogy a_{100} hány nemnegatív összegű párnak eleme. Ha $|a_1| \leq a_{100}$, akkor mind a 99 pár, amelyben a_{100} szerepel, nemnegatív összegű, ezáltal készen vagyunk.
Ha $|a_1| > a_{100}$, akkor azt állítjuk, hogy a_{100} legalább 50 és a_{99} legalább további 49 nemnegatív összegű párnak eleme. Ehhez mindössze annyit kell belátni, hogy $|a_{50}| \leq a_{99}$. Ha ez nem teljesülne, azaz $|a_{50}| > a_{99}$ lenne igaz, akkor ellentmondásra jutnánk az alábbi módon

$$0 = \sum_{i=0}^{100} a_i = a_1 + a_{100} + \sum_{i=2}^{50} a_i + \sum_{i=51}^{99} a_i < 0 + 49 \cdot (a_{50} + a_{99}) < 0$$

Tehát az $a_{50}, a_{51}, \ldots a_{98}$ számok mindegyike jó párt alkot a_{99}-cel és a_{100}-zal (ez $2 \cdot 49 = 98$ pár), valamint megfelelő pár még az (a_{99}, a_{100}) is. Ezzel ebben az esetben is megadtunk 99 nemnegatív összegű párt □

2. megoldás (Füredi Erik; lejegyezte: Várkonyi Zsombor). Minden teljes párosításban szerepelnie kell legalább egy nemnegatív összegű párnak, hiszen ha mind az 50 pár összege negatív lenne, akkor a 100 szám összege is negatív lenne. A 100 csúcsú teljes gráf közismert módon felbontható 99 diszjunkt teljes párosításra (1-faktorra). Helyezzük el a számokat egy szabályos 99-szög csúcsaiba és súlypontjába. Az egyes teljes párosításokat úgy kapjuk, hogy a középen lévő számnak találunk egy párt, őket összekötjük egy éllel és minden erre merőleges élt behúzunk. Világos, hogy ez 99 diszjunkt teljes párosítás lesz, hiszen minden élről egyértelműen eldönthető, hogy melyik 1-faktorhoz tartozik. Ezzel megadtunk 99 nemnegatív összegű párt. □

1.1. Egyenlőtlenségek

2. feladat (Bán-Szabó Áron)
Az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $a + b + c = abc$. Igazold, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Szabó Kornél megoldása. Alkalmazzuk az $a = \operatorname{tg}(x), b = \operatorname{tg}(y), c = \operatorname{tg}(z)$ helyettesítéseket. Mivel $0 < a, b, c$, feltehetjük, hogy $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Még vegyük észre, hogy a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$-et $\cos^2$-tel leosztva azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

és így
$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \cos(x) \quad \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = \cos(y) \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \cos(z).$$
Azaz a bizonyítandó állítás ekvivalens a következő állítással:

> Ha $\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y) + \mathrm{tg}(z) = \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)\mathrm{tg}(z)$ teljesül, akkor $\cos x + \cos y + \cos z \leq \frac{3}{2}$ is teljesül – itt $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ha belátnánk, hogy $x + y + z = \pi$, akkor készen is lennénk, hiszen a cos függvény konkáv a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, így a Jensen-egyenlőtlenség miatt
$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3} \leq \cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$
ami ekvivalens azzal, hogy $\cos x + \cos y + \cos z \leq \frac{3}{2}$.

Most pedig belátjuk, hogy a $\mathrm{tg}(x)+\mathrm{tg}(y)+\mathrm{tg}(z) = \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)\mathrm{tg}(z)$ egyenlőség a $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ feltétel mellett éppen ekvivalens azzal, hogy $x+y+z = \pi$ (azaz x, y, z egy háromszög szögei).

Fixáljuk x-et és y-t és mozgassuk z-t. Ekkor a
$$f(z) = \mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y) + \mathrm{tg}(z) - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)\mathrm{tg}(z)$$
függvény $\mathrm{tg}(z)$ szerint lineárisan változik, és (mivel $0 < x, y < \pi$), nem a konstans nulla függvény, azaz egy helyen lesz nulla. Most belátom, hogy ez a hely a $z = \pi - x - y$.

Mivel $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ és $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\mathrm{tg}(\pi - x) = -\mathrm{tg}(x)$.

Ezek szerint azt kell igazolnom, hogy
$$\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y) - \mathrm{tg}(x+y) = \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)\mathrm{tg}(x+y)$$
A tangens függvény addíciós képletéből ez ekvivalens a következővel:
$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y) - \frac{\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y)}{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)} &= -\mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)\frac{\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y)}{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)} \\
1 - \frac{1}{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)} &= \frac{-\mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)}{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)} \\
\frac{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y) - 1}{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)} &= \frac{-\mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)}{1 - \mathrm{tg}(x)\mathrm{tg}(y)}
\end{aligned}$$
Ez pedig igaz, tehát x, y, z valóban egy háromszög három szöge,
így igaz rájuk, hogy $\cos x + \cos y + \cos z \leq \frac{3}{2}$. □

3. feladat (Réti Zoltán)
A pozitív a, b, c valós számokra teljesül, hogy $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Bizonyítsuk be, hogy $a+b+c \leq 3$.

Szabó Kornél megoldása. A feladatot a Lagrange-multiplikátorok módszerével fogom megoldani. A módszer a következő:

A Lagrange-multiplikátorok módszere

Legyen egy $f(x_1, ..., x_n)$ függvény, aminek szélsőértékét keressük úgy, hogy van k feltételünk a következő alakban.

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Ekkor keresünk úgynevezett Lagrange-multiplikátorokat úgy, hogy teljesüljenek a következő egyenlőségek (jelölésmagyarázat az egyenlőségek alatt):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_1} g_k(x_1, \ldots, x_n) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_2} g_k(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_n} g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_n} g_k(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Itt $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n)$ azt jelenti, hogy f-et úgy deriváljuk, mintha egy egyváltozós függvény lenne, ahol x_1 változó, minden más pedig paraméter. Ezt nevezzük x_1 szerinti parciális deriváltnak.
λ_i a **Lagrange-multiplikátor**. Ez valami szám. Ekkor $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az $n+k$ ismeretlenünk, és van $n+k$ egyenletünk, hiszen van k darab feltételünk $(g_1, \ldots, g_k)$, és az n darab egyenletünk a parciális deriváltakból. Ekkor az egyenletrendszer megoldása egyértelmű.
A tételünk az, hogy csak ott lehet szélsőértéke f-nek, ahol vagy x_i egy intervallum végpontjában van (mondjuk tudjuk, hogy $x_2 \in [0, 1]$, és $x_2 = 0$), vagy pedig ott, ahol minden x_i az, amit ez az egyenletrendszer megoldásnak ad.

Ezzel a tudással támadjuk meg a feladatot:

- az f függvényünk, amit maximalizálni akarunk, az a $f(a, b, c) = a + b + c$;
- a feltételünk az, hogy $g(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4 = 0$.

Írjuk ekkor fel a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} f(a,b,c) = 1 &= \lambda \frac{\partial}{\partial a} g(a,b,c) = \lambda(2a+bc) \\
\frac{\partial}{\partial b} f(a,b,c) = 1 &= \lambda \frac{\partial}{\partial b} g(a,b,c) = \lambda(2b+ac) \\
\frac{\partial}{\partial c} f(a,b,c) = 1 &= \lambda \frac{\partial}{\partial c} g(a,b,c) = \lambda(2c+ab)
\end{aligned}$$

Ez azt mondja nekünk, hogy:

$$2a + bc = 2b + ac = 2c + ab.$$

Ekkor $2a + bc - 2b - ac = 0$, azaz $(a - b)(2 - c) = 0$. Ez azt jelenti, hogy vagy $a = b$, vagy $c = 2$. Ha $c = 2$, akkor $c^2 = 4$, azaz $a = b = 0$. Ekkor $a + b + c = 2 < 3$, ebben az esetben készen vagyunk. Tehát az az eset maradt, hogy $a = b$.

Hasonlóan, a $2b + ac = 2c + ab$ egyenlet átrendezve $(b - c)(2 - a) = 0$, ahol $a = 2$ megint azt jelentené, hogy $a+b+c = 2$. Tehát azt is feltehetjük, hogy $b = c$, azaz mindhárom változó egyenlő kell legyen.

Ekkor a feltétel szerint: $3a^2 + a^3 \leq 4$, amelyből következik, hogy $a \leq 1$ (hiszen különben, ha $a > 1$, akkor $a^3 > a^2 > a$, azaz $3a^2 + a^3 > 4a > 4$).

Végül még az intervallum széleit kell megnézni, ami pedig az az eset, hogy ha valamelyik szám a 0-hoz tart.

Ha $a \to 0$, akkor $a^2 + abc + b^2 + c^2 \to b^2 + c^2$ és $a + b + c \to b + c$. Tehát itt az az állítás, hogy ha $b^2 + c^2 = 4$, akkor $b + c \leq 3$, ami igaz, hiszen $8 = 2b^2 + 2c^2 \geq (b + c)^2$ a Rendezési-tétel miatt, vagyis $3 > \sqrt{8} \geq b + c$. □

Bán-Szabó Áron megoldása. A bizonyítandó állításnál egy csöppet általánosabb egyenlőtlenséget fogunk belátni:

$$\sqrt{1 - abc} \cdot (3 - a - b - c) \geq |(a - 1)(b - 1)(c - 1)|$$

Ehhez egy igen szép lemma belátásával fogunk kezdeni:

1.1. lemma. $ab + c \leq 2$.

A lemma bizonyítása. Indirekt módon tegyük fel, hogy $ab + c > 2$. Ekkor

$$4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc = a^2 + b^2 + c(c + ab) > a^2 + b^2 + 2c \geq 2ab + 2c = 2(ab + c) > 4,$$

ami ellentmondás. □

Most térjünk rá a feladatra. Az $a - 1, b - 1, c - 1$ számok között skatulyelv szerint lesz két olyan, melyek úgymond azonos előjelűek, azaz mindketten nem negatívak, vagy mindketten negatívak. Legyenek ezek $a - 1$ és $b - 1$. Ekkor $(a - 1)(b - 1) \geq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
2 &\geq ab + c \\
3 - c &\geq ab + 1 \\
3 - c - a - b &\geq ab + 1 - a - b \\
3 - a - b - c &\geq (a - 1)(b - 1) \geq 0
\end{aligned}$$

Illetve

$$\begin{aligned} 2 &\geq ab + c \\ 2c &\geq abc + c^2 \\ -abc &\geq c^2 - 2c \\ 1 - abc &\geq c^2 - 2c + 1 \\ 1 - abc &\geq (c-1)^2 \\ \sqrt{1-abc} &\geq |c-1| \end{aligned}$$

A két utolsó egyenlőtlenséget összeszorozva megkapjuk a belátandó egyenlőtlenséget (ezt megtehetjük, hiszen mindkét egyenlőtlenség nemnegatív számokkal foglalkozik). □

1.2. Függvények

4. feladat (Hervay Bence)
Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x, y) = g(x) - g(y)$ valamilyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

Reimann Kristóf megoldása. Helyettesítsünk be először $x = y = z$-t a függvényegyenletbe:

$$f(x, x) + f(x, x) + f(x, x) = 3f(x, x) = 0.$$

Ebből $f(x, x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ következik. Most helyettesítsük be az (x, y, x) számhármast a függvényegyenletbe:

$$f(x, y) + f(x, x) + f(y, x) = 0, \quad \text{így az előzőek alapján} \quad f(x, y) = -f(y, x).$$

Tehát $f(x, y) = -f(y, x)$ is fennáll minden (x, y) számpárra. Most pedig

helyettesítsünk be $(x, 0, y)$-t:	$f(x, y) + f(x, 0) + f(0, y)$	$=$	$0.$
A második tulajdonság miatt:	$-f(y, x) + f(x, 0) + f(0, y)$	$=$	$0.$
Mindkét oldalhoz $f(y, x)$-et adva:	$f(x, 0) + f(0, y)$	$=$	$f(y, x).$
Mindkét oldalt (-1)-gyel megszorozva:	$f(y, 0) - f(x, 0)$	$=$	$f(x, y).$

Tehát a keresett függvény a $g(x) = -f(x, 0)$. □

5. feladat (Kun Ágoston)
Melyek azok az $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvények, amelyekre teljesül, hogy:

$$f(x+y) + f(x)\cdot f(y) = f(x\cdot y) + f(x) + f(y)$$

Hujter Bálint megoldása. A függvényegyenletnek két triviális megoldása is van:

$$f(x) = x \text{ (identitás függvény)} \quad \text{és} \quad f(x) = 2 \text{ (konstans függvény)}$$

Azt fogjuk belátni, hogy ezeken kívül más megoldás nincs.

Ehhez először behelyettesítünk néhány egyszerű értéket. Az $x = y = 2$ helyettesítéssel

$$f(4) + f(2)\cdot f(2) = f(4) + f(2) + f(2).$$

Azaz $f(2)\cdot f(2) = 2\cdot f(2)$, ami csak úgy lehetséges, ha $\boxed{f(2) = 2}$, hiszen a feladat feltételei szerint f csak pozitív értékeket vehet fel, $f(2)$ nem lehet 0.

Az $x = y = 1$ helyettesítéssel:

$$f(2) + f(1)^2 = f(1) + f(1) + f(1),$$

azaz (felhasználva, hogy $f(2) = 2$):

$$0 = f(1)^2 - 3f(1) + 2 = (f(1) - 1)(f(1) - 2).$$

Tehát $\boxed{f(1) = 1 \text{ vagy } f(1) = 2}$. Ennek örülünk, hiszen passzol a megtalált triviális megoldásainkhoz. Mostantól az a dolgunk, hogy belássuk a következőket.

(A) Ha $f(1) = 1$, akkor $f(x) = x$ minden x-re.

(B) Ha $f(1) = 2$, akkor $f(x) = 2$ minden x-re.

A megoldás tehát innentől két különálló részre ágazik.

*Az **(A)** állítás bizonyítása.* Ha csak y helyére írunk 1-et, akkor így fest az egyenletünk:

$$f(x+1) + f(x)\cdot f(1) = f(x\cdot 1) + f(x) + f(1).$$

Kihasználva, hogy $f(1) = 1$, azt kapjuk, hogy $\boxed{f(x+1) = f(x) + 1}$.
Ebből pedig rögtön következik minden n pozitív egészre is, hogy $\boxed{f(x+n) = f(x) + n}$, és az is, hogy $\boxed{f(n) = n \text{ minden } n \text{ pozitív egészre}}$.

Ha most y helyére egy n pozitív egész számot helyettesítünk, akkor ezt kapjuk:

$$f(x+n) + f(x)\cdot f(n) = f(x\cdot n) + f(x) + f(n);$$

azaz kihasználva a korábbi megállapításainkat:

$$f(x) + f(n) + f(x)\cdot n = f(x\cdot n) + f(x) + n;$$

azaz $\boxed{n\cdot f(x) = f(n\cdot x), \text{ ha } n \in \mathbb{N}^+}$. Avagy x helyébe $\frac{x}{n}$-et írva $\boxed{f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}, \text{ ha } n \in \mathbb{N}^+}$.

Utóbbiból rögtön következik, hogy $\boxed{f(q) = q \text{ minden } q \text{ pozitív racionális számra}}$. Ahhoz, hogy a megoldás irracionális számokra is kiterjedjen, elengendő belátnunk, hogy f monoton növő, azaz minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén $f(x+y) - f(x) \geq 0$.

Az eredeti függvényegyenlet átrendezhető így:

$$f(x+y) - f(x) = f(xy) + f(y) - f(x) \cdot f(y) = f(xy) + f(y)\left(1 - f(x)\right).$$

Ha $f(x) \geq 1$, akkor a jobb oldal láthatóan pozitív (hiszen f csak pozitív értékeket vesz fel). Ha $f(x) > 1$, akkor válasszunk egy olyan n pozitív egész számot, amelyre $n > f(1)$, majd írjunk x és y helyébe $\frac{x}{n}$-t és $\frac{y}{n}$-t:

$$f\left(\frac{x+y}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{xy}{n^2}\right) + f\left(\frac{y}{n}\right)\left(1 - f\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Azt már beláttuk $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, hogy $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$, tehát $f\left(\frac{x}{n}\right) < 1$, azaz a jobb oldal pozitív. Másrészt a bal oldal átírható így:

$$f\left(\frac{x+y}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(f(x+y) - f(x)\right)$$

tehát megkaptuk, hogy $f(x+y) - f(x) > 0$ minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén, azaz f tényleg monoton növő, következésképpen $f(x) = x$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén. □

*A **(B)** állítás bizonyítása.* Ha y helyébe 1-et írunk, akkor

$$f(x+1) + f(x) \cdot f(1) = f(x \cdot 1) + f(x) + f(1)$$

azaz $f(1) = 2$ miatt

$$f(x+1) + 2f(x) = 2f(x) + 2, \text{ azaz } f(x+1) = 2$$

azaz majdnem rögtön kész is vagyunk. Azonban a függvényegyenlet csak pozitív x-ekről szól, ezért egyelőre csak annyi jött ki, hogy $\boxed{f(x) = 2, \text{ ha } x \geq 1}$.

Ha $0 < x < 1$, akkor írjunk y helyébe $\frac{1}{x}$-et:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) + f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) + f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

azaz

$$2 + f(x) \cdot 2 = 2 + f(x) + 2.$$

Itt kihasználtuk, hogy $\frac{1}{x} > 1$, és azt a közismert tényt is, hogy $x + \frac{1}{x} \geq 2$ minden pozitív x esetén, így ezekhez biztosan 2-t rendel az f függvény.

Az utolsó egyenletünk triviálisan átrendezve $f(x) = 2$-t ad az $0 < x < 1$ esetben is. □

Beláttuk tehát, hogy a függvényegyenletnek tényleg csak az elején megtalált két függvény lehet megoldása. □

Ez a feladat eredetileg a KöMaL A.304. feladata volt, az itt ismertetett megoldás eltér az online elérhető, ravasz helyettesítést használó megoldástól.

6. feladat (Reimann Kristóf)
Van-e olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely racionálisokhoz irracionális, irracionálisokhoz racionális értékeket rendel?

Hervay Bence megoldása. Indirekten tegyük fel, hogy létezik ilyen f függvény. Először be fogjuk belátni, hogy értékkészlete megszámlálható végtelen számosságú, utána pedig azt, hogy a feltétel teljesüléséhez kontinuum számosságúnak kéne lennie, ezzel belátjuk, hogy nem létezik ilyen függvény.

Tudjuk, hogy f racionális helyeken legfeljebb annyi számot vehet fel, ahány racionális szám van (azaz megszámlálható végtelen sokat). Mivel f irracionálisokhoz racionális értéket rendel, így irracionális helyeken szintén legfeljebb annyi számot vehet fel a függvény, ahány racionális szám van, így beláttuk, hogy f értékkészlete a valósak halmazán megszámlálható végtelen számosságú.

Ezt összefoglalhatjuk úgy is, hogy:

$$\begin{aligned}\left|\left\{f(x)|x\in\mathbb{R}\right\}\right| &\leq \left|\left\{f(x)|x\in\mathbb{Q}\right\}\cup\left\{f(x)|x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}\right| \leq \\ &\leq \left|\left\{f(x)|x\in\mathbb{Q}\right\}\right| + \left|\left\{f(x)|x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}\right| \leq \left|\mathbb{Q}\right| + \left|\mathbb{Q}\right| \leq \aleph_0\end{aligned}$$

Ha f konstans függvény lenne, akkor nyilván nem teljesülhet a feltétel, (hiszen fel kell vennie racionális és irracionális értékeket is,) így f nem lehet konstans függvény, tehát felvesz két különböző a, b értéket (legyen $a < b$). Ekkor ismert, hogy az $[a, b]$ intervallumon minden értéket felvesz, ebből viszont egyértelműen következne, hogy az értékkészlete kontinuum számosságú. Ez ellentmondás, így az indirekt feltétel hamis volt, tehát beláttuk a bizonyítandó állítást. □

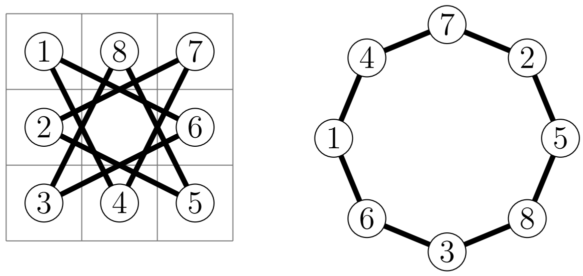
2. Kombinatorika

2.1. Sakktáblák, négyzetrácsok

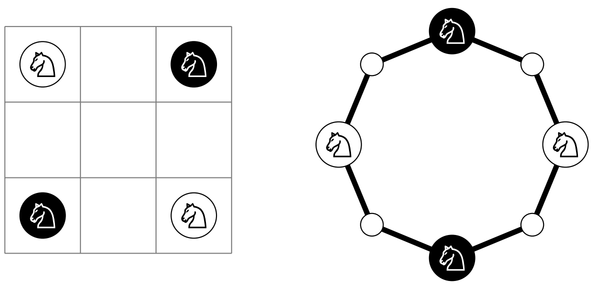
7. feladat (Fleiner Zsigmond)
Egy 3×3-as tábla 4 sarkában 2 világos és 2 sötét huszár áll úgy, hogy a szemben lévő sarkokban ugyanolyan a huszárok színe. Elképzelhető-e, hogy néhány lépés után megint a sarkokban álljanak a huszárok, viszont a szemben lévők ellentétes színűek legyenek.

Megoldás. Nem érhető el, hogy ellentétes színű huszárok legyenek az átellenes sarkokban.

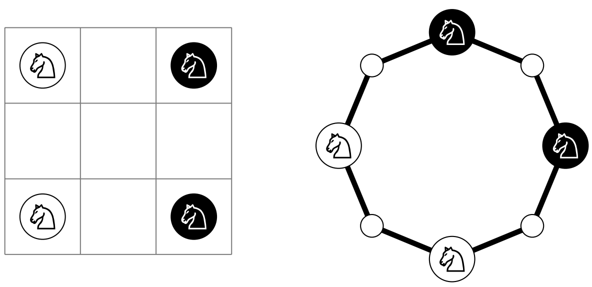
A középső mezőre egyik huszár sem fog tudni lépni. A maradék 8 mezőt számozzuk meg, majd kössük össze azon mezőpárokat, amelyek között át tud lépni egy huszár: ez a lehetséges lépések gráfja. Ha ezt a gráfot „kibogozzuk”, akkor láthatjuk, hogy a valójában egyetlen körből áll.



Tegyük fel most a 4 huszárt a feladat szövege szerint:



Látható, hogy a körön a sötét és a világos huszárok felváltva helyezkednek el. Akárhogy is lépegetünk a huszárokkal, ez a tulajdonság végig megmarad. Így nem érhető el a kívánt végállapot sem, hiszen abban az azonos színű huszárok egymás mellett helyezkednének el a körön.

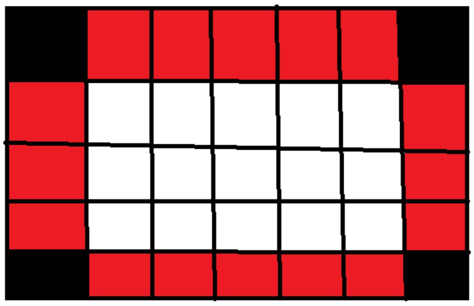


□

8. feladat (Velich Nóra)
Adott egy n oszlopot és k sort tartalmazó sakktábla, melynek bizonyos mezőire korongokat helyeztünk (minden mezőre legfeljebb egyet). Nevezzünk két korongot szomszédosnak, ha egy sorban vagy oszlopban vannak, és az őket összekötő szakaszon nincs további korong. Minden korongnak legfeljebb három szomszédja van. Legfeljebb hány korong van a sakktáblán?

Nyárfádi Patrik megoldása. Ha n vagy k értéke 1, akkor ennek megfelelően n illetve k korong lehet legfeljebb a sakktáblán (tehát az egész sakktáblát kitölthetjük korongokkal, hiszen ekkor minden korongnak csak legfeljebb két szomszédja lesz).

Ha $n \geq 2$ és $k \geq 2$, akkor a sakktábla sarok- és keretmezőibe rakjunk korongokat. (Az ábrán piros mezőket nevezzük a *keretmező*nek, a feketéket *sarokmező*nek, míg a fehéreket *belső mező*nek).



Könnyen láthatjuk, hogy ez egy megfelelő elrendezés, hiszen ekkor a négy sarokmezőn kívül minden korongnak pontosan három, definíció szerinti szomszédja van, a sarokmezőknek pedig kettő. Ez összesen $2n + 2k - 4$ mező.

Most pedig azt állítom, hogy ettől nem lehet több. Ezt úgy fogom belátni, hogy minden belső mezőre tett koronghoz hozzárendelek egy üresen maradt keretmezőt, méghozzá úgy, hogy különböző ilyen korongokhoz különböző keretmező tartozzon.

Vizsgáljunk meg egy belső mezőre tett korongot. Ehhez képest mind a négy irányban elhelyezkedik egy-egy keretmező. Ezen keretmezők közül viszont legfeljebb háromnak az irányában lehet a korongnak szomszédja. Tehát mindenképp van legalább egy olyan üres keretmező, melyet a vizsgált koronggal összekötő szakaszon nincsen másik korong. Ezt a mezőt (ha több is van, az egyiket) hozzárendelem a vizsgált koronghoz. Ezzel megvalósítottam a kívánt hozzárendelést.

Következésképpen a belső mezőre tett korongok száma nem lehet több, mint az üresen maradt keretmezők száma. Tehát összesen nem lehet több korong a belső és a keretmezőkön együttesen, mint ahány keretmező van. Azaz a korongok maximális lehetésges száma a sarokmezők és keretmezők számának összege: $2n + 2k - 4$. $\square$

9. feladat (Fleiner Zsigmond)
Egy $n \times n$-es táblára felírjuk az első n^2 természetes számot.
Bizonyítsuk, hogy lesz két szomszédos, melyek különbsége legalább n.

Terjék András megoldása. Tekintsük a táblázat egy tetszőleges kitöltését. Kezdjük el ennek a kitöltésnek a számait növekvő sorrendben beírogatni, és hagyjuk abba az első olyan k szám beírása után, amikor teljesül hogy minden sorban van szám, vagy minden oszlopban van szám. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy k beírása után minden sorban van szám.

Ekkor ha csak $k-1$-ig írtuk volna be a számokat, akkor még lett volna üres sor és oszlop, és k-t az üres sorba írtuk. Tehát k beírása után minden sorban van szám, és minden sorban van üres mező. Így minden sorban van olyan üres mező is, amelynek valamelyik szomszédjában már van szám.

Színezzük pirosra az összes üres mezőt, aminek van szomszédjában szám. Ekkor tehát lesz minden sorban legalább egy, azaz összesen legalább n db piros mező. Tehát ha folytatjuk tovább a kitöltést $k+1$-től n^2-ig, akkor lesz olyan piros mező, amelybe legalább $k+n$ kerül, és ennek van szomszédja, amiben legfeljebb k szám van írva. Tehát lesz két szomszédos mező, amelyekben a számok különbsége legalább n. □

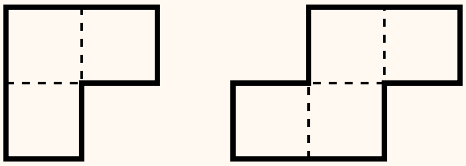
10. feladat (Bencsik Ádám)
A koordináta rendszer $(0;0)$ rácspontjában van egy pont. Egy lépésben egy $(m;n)$ pontot, amennyiben $(m+1;n)$ és $(m;n+1)$ rácspont üres, ketté tudunk osztani. Ekkor $(m;n)$ pont eltűnik, és megjelenik egy-egy pont $(m+1;n)$ és $(m;n+1)$-ben. Meg lehet-e oldani véges sok lépéssel, hogy kiürítsük az első k db átlót, ahol k tetszőlegesen nagy pozitív egész szám.

Fleiner Zsigmond megoldása. Bebizonyítom, hogy már az első három átlót sem lehet kiűriteni.

Súlyozzuk a mezőket úgy, hogy az (x,y) koordinátájú mező súlya legyen $\frac{1}{2^{x+y}}$. Vegyük észre, hogy azon mezők összsúlya amelyeken pont van állandó. Mivel kezdetben a $(0,0)$ mezőn állt csak pont, így az összsúly végig 1.

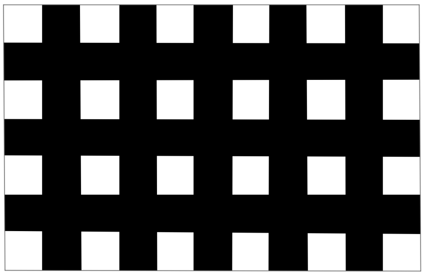
Vizsgáljuk meg, hogy mennyi az egész táblázatban a súlyok összege. Ezt könnyen megtehetjük. Az első sorban 2 az összeg, másodikban 1, majd $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \ldots$. Így a táblázat összege 4. Most vegyük észre, hogy a szétosztás tulajdonságából adódóan az alsó sor és bal oldali oszlopban pontosan 1 pont állhat és ezeknek súlya mind a két esetben $\frac{1}{8}$. Most tehát nézzük azok mezők súlyát, ahol nincs pont. Az alsó és bal oldali oszlopban ezek összege legfeljebb $\frac{11}{4}$ (mivel összesen a mezők súlya 3 és lehet ezeken két darab legfeljebb $\frac{1}{8}$ súlyú pont). Továbbá még az $(1,1)$ koordinátájú mezőn sincs pont (aminek súlya $\frac{1}{4}$). Így azok mezők súlya, amin nincs pont 3. Ez azt jelenti, hogy az összes többi mezőn van pont (mivel a pontok összege 1). Ez viszont nem lehet, hiszen csak véges pont van. □

11. feladat (Gyetvai Miklós)
m és n 3-nál nagyobb egész számok. Vegyünk a négyzetrácson egy $(2m-1)\times(2n-1)$ méretű téglalapot, amelyeket lefedtünk az alábbi két elem felhasználásával:



A két elemből összesen minimum hányat kell felhasználni a téglalap parkettázásához?

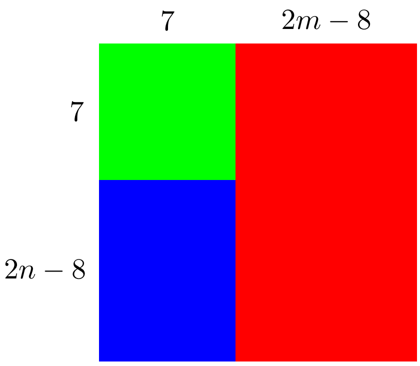
Réti Zoltán megoldása. **(Alsó korlát)** Lássuk be először, hogy minimum $n\cdot m$ db elem szükséges a lefedéshez. Ehhez színezzük ki a négyzetrács minden második oszlopát és sorát feketével, ahogy a mellékelt ábrán látszik:

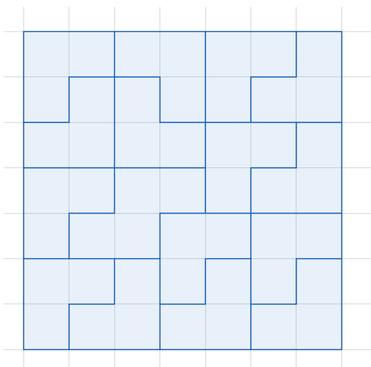


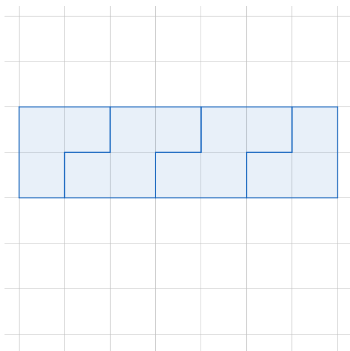
Minden váltoakozó színű oszlopban és sorban eggyel több fehér van, mint fekete. Így egy sorban $\frac{2n-1+1}{2}=n$ db fehér van és hasonlóképp egy oszlopban m darab van. Azaz $n\cdot m$ fehér négyzet van.

Az látszik, hogy ha L betűt használumk, akkor 0 vagy 1 fehéret fed le; ha Z betűt, az 1-et fed le. Tehát ahhoz, hogy $n\cdot m$ fehér négyzetet lefedjünk legalább $n\cdot m$ db elem kell.

(Konstrukció) A konstrukciónk 3 részből áll, mivel a $(2m-1)\times(2n-1)$ négyzetrácsot felosztjuk egy 7×7-es zöld; egy $(2m-8)\times(2n-1)$-es piros és egy $(2n-8)\times 7$-es kék téglalapra, ahogy az első ábrán látható:







A második ábrán látható, hogy a 7×7 zöld rész lefedhető 15 db L betűvel és 1 db Z betűvel.

Egy $2\times x$-es téglatestet fedjünk le úgy, hogy a két vége L betű és közte Z-k (lásd a harmadik ábrán). Ilyenkor felhasználunk 2 db L-t és $\frac{x-3}{2}$ db Z-t. Azaz a $(2m-8)\times(2n-1)$-es piros téglalap igazából $m-4$ db $2\times(2n-1)$-es téglalapból áll, amelyekben összesen van

$$(m-4)\cdot 2=2m-8 \text{ db L betű} \quad \text{és} \quad (m-4)\cdot\frac{2n-1-3}{2}=nm-2m-4n+8 \text{ db Z betű.}$$

Aztán a kék $(2n-8)\times 7$ téglalap $n-4$ db 2×7-es téglalapból áll.
Azaz a kék rész fedéséhez összesen:

$$(n-4)\cdot 2 = 2n-8 \text{ db L betű} \quad \text{és} \quad (n-4)\cdot 2 = 2n-8 \text{ db Z betű kell.}$$

Azaz összesen L betűből:

$$15+(2m-8)+(2n-8) = 2n+2m-1$$

darab kell, míg Z betűből

$$1+(nm-2m-4n+8)+(2n-8) = nm-2m-2n+1$$

Tehát összesen $(2n+2m-1)+(nm-2m-2n+1) = nm$ elemből áll a konstrukciónk, és arra már beláttuk, hogy az a minimum. □

2.2. Részhalmaz-rendszerek

2.2.1. A Sperner-tétel és a LYM-egyenlőtlenség

12. feladat (Reimann Kristóf)
Legyenek A_1, A_2,...,A_n az $\{1,2,\ldots,M\}$ halmaz páronként egymást nem teljes egészében fedő részhalmazai. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{a_i}} \leq 1, \qquad \text{ahol } a_i = |A_i|.$$

A feladat állítása *LYM-egyenlőtlenség* néven is ismert (ld. Lubell–Yamamoto–Meshalkin ineq.).

Tot Bagi Márton megoldása. Képzeljünk el egy szerencsejátékot, ahol néhány számot kell írni egy szelvényre. Csak különböző számokat lehet írni és minden szám 1 és M között van. A sorsolásnál egyesével húzzák ki a számokat, és egy szelvény akkor nyer, ha van egy olyan pillanat amikor pontosan az ő számai vannak kihúzva (sorrend nem számít). Annak az esélye hogy egy szelvény nyerő, éppen

$$\frac{1}{\binom{M}{k}}$$

ahol k a számok száma a szelvényen.

Ha olyan szelvényeket nézünk, amelyek páronként egymást nem teljesen fedőek, akkor ezek közül a szelvények közül maximum egy fog nyerni (*egymást kizáró események*). Ami azt jelenti, hogy ha összeadjuk a szelvények esélyeit a nyerésre, az eredmény ≤ 1.

Ha a szelvényeket halmazoknak tekintjük, amelyek a szelvényre írt számokat tartalmazzák, akkor vegyük észre, hogy kész vagyunk a feladattal. □

De miről szól ez a feladat igazából? Ennek felfedezéséhez és megértéséhez kitűztünk a táborban egy tanári feladatot is.

13. feladat (tanári)
25 zenész együtt táborozik. A táborban néha koncerteket adnak egymásnak: minden koncerten a zenészek egy részhalmaza a színpadon játszott, a többiek a nézőtérről figyelték. Legalább hány koncertet kellett adniuk, ha minden zenész megfigyelhette a nézőtérről mindegyik társának játékát? (Tehát bármely A és B zenészekhez volt olyan koncert is, amelyen A a színpadon játszott, míg B a nézőtérről figyelte; és olyan is, amikor B a színpadon játszott, míg A ült a nézőtéren.)

Megoldás. Legyen a koncertek száma M. Ekkor ha az i. zenészre felírjuk, hogy hányadik koncerteken játszott, akkor az $\{1, 2, \ldots, M\}$ egy A_i részhalmazát kapjuk.

Egyetlen (i, j) párra sem teljesülhet, hogy $A_i \subset A_j$, hiszen akkor az j. zenész mindig a színpadon lett volna, amikor az i. is, tehát nem figyelhette volna meg a játékát. Tehát az

$$A_1, A_2, \ldots, A_{21}$$

halmazrendszer eleget tesz a LYM-egyenlőtlenség feltételeinek, azaz teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{25} \frac{1}{\binom{M}{a_i}} \leq 1, \qquad \text{ahol } a_i = |A_i|.$$

Következésképpen a $\frac{1}{\binom{M}{a_i}}$ összeadandók között kell legyen olyan, amely legfeljebb $\frac{1}{25}$, azaz a $\binom{M}{a_i}$ számok között kell legyen olyan, amely legalább 25.

25-nél nagyobb számok a Pascal-háromszögben először a 7. sorban fordulnak elő: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$; tehát a koncertek száma legalább 7.

De 7 koncerttel tényleg meg is valósíthatók a kívánt feltételek. Rendeljük hozzá mind a 25 zenészhez az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmaz egy különböző, 3-elemű részhalmazát. Minden zenész a hozzá rendelt részhalmaz eleimenek megfelelő sorszámú koncerteken lépjen fel. Könnyen ellenőrizhető, hogy így mindenki meg tudja figyelni az összes társának játékát. □

A LYM-egyenlőtlenség valójában a régebbi és híresebb Sperner-tétel finomítása:

Sperner-tétel (1928)

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \{1, 2, \ldots, M\}$ halmazrendszerben egyik halmaz sem részhalmaza másiknak[a], akkor

$$n \leq \binom{M}{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}.$$

[a] Az ilyen halmazrendszereket *Sperner-rendszernek* nevezzük.

A Sperner-tételnek számos bizonyítása ismert (több ezek közül magyar matematikusoktól származiuk), az egyik legszebbet mutattuk be most a LYM-egyenlőtlenség közvetítésével.

A zenészes feladat megoldásához a Sperner-tétel állítása is elegendő lett volna.

2.2.2. További feladatok részhalmaz-rendszerekről

14. feladat (Baski Bence)
2016 rabló együtt elrabolt egy nagy kincsesládát és el akarják ásni. Mivel nem bíznak egymásban, ezért úgy döntenek, hogy szerelnek rá lakatokat és a lakatokhoz való kulcsokat szétosztják egymás között. (Egy lakathoz több kulcs is tartozhat, de egy kulcs csak egy lakatot nyit). Úgy szeretnék ezt megtenni, hogy bármely 1010 közülük ki tudja nyitni a kincset, de semelyik 2 nem tudja ezt megtenni. Legalább hány lakatra van szükségük?

Lazur Zsófia megoldása. Először lássuk be, hogy szükség van legalább 6 lakatra. Legyen a lakatok száma n. Mivel semelyik 2 rabló nem tudja kinyitni a ládát, ezért egy rablónál legfeljebb $n-2$ kulcs lehet. Válasszunk ki tetszőleges $n-2$ lakatot. Pontosan ezekhez a lakatokhoz legfeljebb 2 rablónak lehet kulcsa, mivel:

(1) Ha valakinél ott van ez az $n-2$ db kulcs, akkor nincs olyan rabló, akinél ott van a maradék kettő, különben ki tudnák nyitni a ládát ketten (legyen a két hiányzó kulcs x, y).

(2) Minden lakathoz legalább 1007 rablónál van kulcs, mivel ha legfeljebb 1006-nál lenne, akkor a maradék $2016 - 1006 = 1010$ ember nem tudná kinyitni a ládát.

Az (1) és (2) pontokból látjuk, hogy lesz legalább 1007 rabló, akiknek x-hez és legalább 1007 rabló, akiknek y-hoz van kulcsuk (ez két diszjunkt halmaz). Emiatt az előre kijelölt $n-2$ lakathoz legfeljebb $2016 - 2 \cdot 1007 = 2$ rablónak van kulcsa.

Most tegyük fel, hogy 5 lakatunk van. Mivel minden lakathoz legalább 1007 rablónak van kulcsa, ezért legalább $1007 \cdot 5 = 5035$ kulcs szükséges. Viszont ekkor legfeljebb $\binom{5}{2} = 10$ db rablónál van $n-2$ kulcs, a többinél pedig legfeljebb $n-3$, ami összesen legfeljebb

$$10(n-2) + 2006(n-3) = 2016n - 6038 = 4042,$$

ami kisebb, mint a minimum 5035 kulcs. Ezzel beláttuk, hogy 5 lakat még nem elég.

Most lássunk egy konstrukciót 6 lakatra. Legyen minden rablónál 3 db kulcs, legyenek a lakatok kulcsai $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Az előforduló kulcshármasok:

$$\begin{array}{ccccc} (1,2,3) & (2,3,4) & (3,4,5) & (4,5,1) & (5,1,2) \\ (1,3,6) & (2,4,6) & (3,5,6) & (4,1,6) & (5,2,6) \end{array}$$

Ekkor minden kulcs pontosan 5 db ilyen 3-asban van benne. Az első 4 db 3-as mindegyike legyen 201, a maradék 6 db 3-as mindegyike 202 rablónál $(201 \cdot 4 + 202 \cdot 6 = 2016)$. Ekkor látható, hogy semelyik 2 rabló nem tudja kinyitni a ládát, mivel nincs 2 olyan 3-as, amelyekben szerepel az összes lakathoz kulcs. Mivel mindegyik kulcs pontosan 5 db 3-asban van benne, ezért 6 különböző 3-asokat birtokló rabló ki tudja nyitni a ládát. Legrosszabb esetben vegyünk 4 db 3-ast az olyanokból, amelyek 202 rablónál vannak (ha 5-öt vennénk, akkor ki lehetne nyitni a ládát) és egy olyat, amelyik 201 rablónál vannak. Mivel ez 5 db 3-as, ezért még egykülönböző 3-ast birtokló rabló segítségével kinyitható a láda. Azaz legalább $202 \cdot 4 + 201 + 1 = 1010$ rabló mindig ki tudja nyitni a ládát.

Ezzel beláttuk, hogy legalább 6 lakatra van szükség. □

15. feladat (Szabó Kornél)
Az igazgatóság a jövő évi fakultációkat tervezi az iskola n tanulója számára. Minden fakultáció legalább két tanulóval indul, és az iskola intézkedési terve előírja, hogy a legalább két közös tanulóval rendelkező csoportok tanulóinak száma eltérjen.
Igazoljuk, hogy a fakultációk maximális száma nem nagyobb, mint $(n-1)^2$.

Velich Nóra megoldása. Vizsgáljuk, hogy hány olyan fakultáció lehet, amelyek k tanuló vesz részt. Ilyenből legfeljebb $\binom{n}{2}/\binom{k}{2}$ lehet, mivel tudjuk, hogy ha kiválasztunk két tanulót, pontosan egy olyan fakt van, amelyre k ember jár, és ők mindketten járnak rá, illetve egy fakton ahova k ember jár összesen $\binom{k}{2}$ emberpár van, összesen pedig $\binom{n}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani két embert.

Ekkor tehát összesen legfeljebb $\sum_{k=2}^{n} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{k}{2}}$ fakt lehet.
Ebből az összegből azonban kiemelhetünk $n(n-1)$-et, hiszen

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{k}{2}} = n(n-1) \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Viszont tudjuk, hogy

$$\frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1+k-1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1},$$

így a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ összeg egy teleszkopikus összeg, így éppen $1 - \frac{1}{n}$ lesz.

Így tehát a faktok maximális száma

$$n(n-1) \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = n(n-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-1)^2,$$

és éppen ez volt a bizonyítandó. □

16. feladat (Hegedűs Dániel)
Igazoljuk, hogy tetszőleges $m \le t$ pozitív egész számok esetén teljesül a következő azonosság:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{t+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{t}{k} \cdot 2^k.$$

Le Julianna megoldása. Tekintsük először a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát! Észre lehet venni, hogy a feladatot máshogyan is át lehet fogalmazni. Legyenek A és B halmazok elemszámai m és t. Ezekből válasszunk ki három halmazt (H_1, H_2, H_3) úgy, hogy $|H_1| = |H_2| = k$, $H_1 \subset A$, $H_2 \subset B$, $H_3 \subset H_1$. Ekkor egyértelműen látszik, hogy ha az A halmazból kiválasztjuk a H_1 halmazt, majd a B halmazból a H_2 halmazt, majd a H_1 halmazból a H_3 halmazt, akkor a jobb oldali kifejezést kapjuk.

Most tekintsük a bal oldalt, először a H_3 halmazt választjuk ki, melynek elemszáma legyen ez esetben $m-k$. Ezután a H_2 halmazt válasszuk ki, melynek elemszáma legyen x. Ekkor az

$A \setminus H_3$ halmazból (melynek elemszáma k) válasszunk ki egy $m-x$ elemű halmazt (ezzel valójában a H_1 halmazt választottuk ki), így valójában egy $t+k$ elemszámú halmazból választottunk ki egy $m-x+x=m$ elemű halmazt. Tehát ez a megfeleltetés egyértelműen azt mutatja, hogy a jobb és a bal oldalon álló kifejezések egyenlőek. □

2.3. Gráfelmélet

17. feladat (Fleiner Zsigmond)
Bizonyítsuk be, hogy egy egyértelműen három-színezhető gráfnak legalább $2n-3$ éle van.

Rubint Gergő megoldása. Ha egy gráf egyértelműen három-színezhető, az azt jelenti, hogy pontosan egyfékeképpen szét lehet osztani a gráf csúcsait három csoportba úgy, hogy a csoportokon belül ne legyenek élek (tehát csak a csoportok között vannak élek), és bármely kettő csoport között van él.

Tehát osszuk szét a gráf csúcsait az előbb említett módon három csoprtba, és legyenek a csoportok nevei A, B és C, valamint az egyes csoportokban lévő csúcsok száma sorrendben a, b és c (tehát $a+b+c=n$).

Nézzük meg A és B csoportok, és a köztük lévő élek által alkotott gráfot. Ez a gráf biztosan összefüggő, mivel ha lenne legalább két komponense, akkor az egyik komponens A-ban lévő csúcsait áttehetnénk B-be, és a B-ben lévő csúcsait pedig A-ba úgy, hogy megmaradna a gráf azon tulajdonsága, hogy csak a csoportok között vannak élek, tehát a gráf nem lenne egyértelműen három-színezhető.

Azt is tudjuk, hogy egy k csúcsú összefüggő gráfnak legalább $k-1$ éle van, tehát az A és B csoportok között futó élek száma legalább $a+b-1$.

Ezt ugyanígy el lehet mondani A és C csoportról, valamint B és C csoportról, szóval A és C között legalább $a+c-1$, B és C között pedig legalább $b+c-1$ él van.

Tehát a gráfnak összesen legalább $(a+b-1)+(a+c-1)+(b+c-1)=2a+2b+2c-3$ éle van, viszont tudjuk, hogy $a+b+c=n$, és ebből következik, hogy $2a+2b+2c-3=2n-3$ és ezt akartuk bizonyítani. □

2.3.1. A barátság-tétel

18. feladat (Móricz Réka)
Egy teremben 11-en vannak. Tudjuk, hogy akárhogyan is választunk ki közülük kettőt, a többiek közül pontosan egy ismeri mindkettőjüket.
Mutassuk meg, hogy van a teremben olyan, aki mindenki mást ismer.

Erre a feladatra született néhány megoldás (ezeket azonban itt nem részeletezzük). Azonban a megoldás után felvetődött, hogy ez valójában a következő híres tétel speciális esete.

Barátság-tétel (Erdős Pál, Rényi Alfréd és T. Sós Vera, 1966)

Tegyük fel, hogy emberek egy csoportjára teljesül, hogy bármely két embernek pontosan egy közös ismerője van. Ekkor van közöttük egy, aki mindenkit ismer.

Külön aktualitást adott ennek tételnek, hogy T. Sós Vera éppen a tábor hónapjában ünnepelte 90. születésnapját. Mivel a tétel bizonyításának első fele elérhetőnek – bár jó nehéznek – tűnt a táborlakó diákok számára, ezért ezt is kitűztük tanári feladatként. Végül született is egy megoldás – éppen attól a Móricz Rékától, aki a 18. feladatot a táborba hozta.

19. feladat (Tanári feladat – a barátság-tétel első fele)
Egy teremben n fő tartózkodik. Tudjuk, hogy akárhogyan is választunk ki közülük kettőt, a többiek közül pontosan egy ismeri mindkettőjüket.
Mutassuk meg, hogy vagy van a teremben olyan, aki mindenki mást ismer, vagy mindenki ugyanannyi embert ismer.

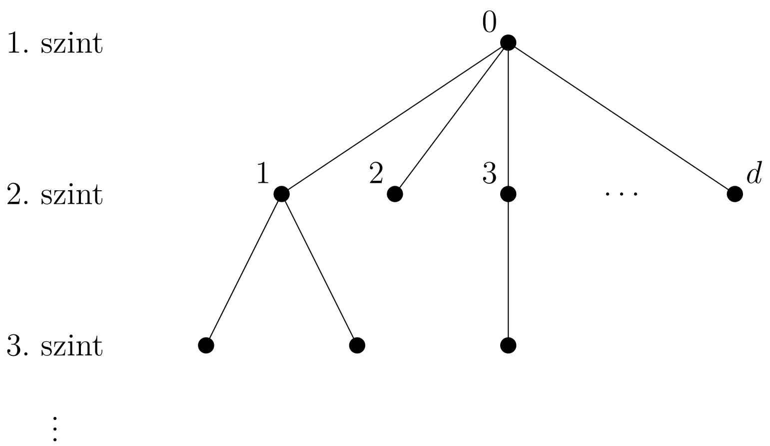
Móricz Réka megoldása. Ábrázoljuk a feladatot gráfként, az emberek legyenek a gráf csúcsai, és kösse össze él azokat, melyek ismeretségben állnak egymással.

1. lemma: A gráfban nem lehet négyszög.

Az 1. lemma bizonyítása. Ha lenne, akkor a négyszög két nem szomszédos csúcsát 2 ember is ismerné (a két maradék csúcs), ami ellentmond a feladat feltételének. □

Válasszuk ki a legnagyobb fokú csúcsot (ha több is van, akkor az egyiket), és csináljunk belőle egy szélességi keresést. Legyen ez a 0. csúcs.

A 0. csúcsnak legyen n ismerőse, számozzuk őket 1-től d-ig (ők lesznek a második mélységi szinten lévő csúcsok). Tudjuk, hogy a 0. csúcsnak minden másik csúccsal létezik közös ismerőse, ezeknek is a második szinten kell elhelyezkedniük a szélességi keresés tulajdonságai miatt.



2. lemma: Bármely csúcsból indított szélességi keresésnek maximum 3 mélységi szintje lehet.

A 2. lemma bizonyítása. Ha lenne 4 szint, akkor az első mélységi szinten lévő csúcsnak és egy, a negyedik szinten lévő tetszőleges csúcsnak nem lenne *közös ismerőse* □

3. lemma: A második szint csúcsai között futó élekre igaz, hogy minden csúcsból pontosan 1 él indul ki.

A 3. lemma bizonyítása. Tegyük fel, hogy van legalább egy csúcs, amiből 2 él is indul. Vegyük ezt a csúcsot, a kettőt amelyekkel ezen a szinten össze van kötve, és a 0. csúcsot. Ezek négyszöget alkotnak, ami ellentmond az 1. lemmának.

A másik lehetőség az, ha az egyik csúcsból nem indul ki szinten belüli él. Ekkor azonban ennek a csúcsnak és a 0. csúcsnak nem lesz közös ismerőse ami ellentmond a feladat feltételének.

□

A 3. lemmából következik, hogy d páros.

Ha a szélességi keresésünkben nincs 3. mélységi szint, akkor beláttuk a feladatot, hiszen akkor a 0 csúcs mindenkit ismer.

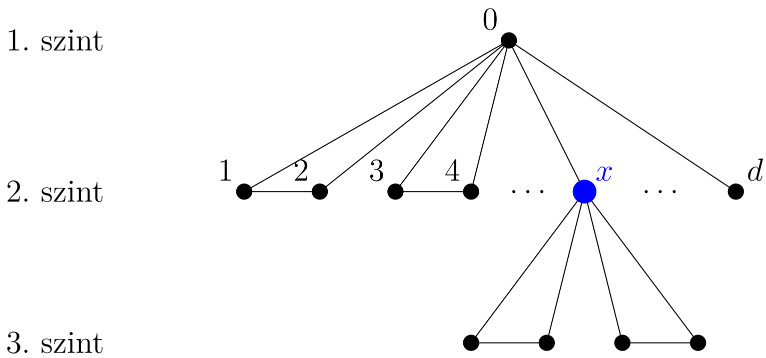
Tegyük fel tehát, hogy létezik 3. szint.

4. lemma: A 3. mélységi szint minden csúcsából pontosan 1 él indul ki a második szint csúcsaiba (vagyis azok közül pontosan 1-gyel van összekötve).

A 4. lemma bizonyítása. Tegyük fel, hogy legalább az egyikből legalább kettő indul. Ekkor a kiválasztott csúcs, a 2 második szintű vele szomszédos csúcs, és a 0. csúcs négyszöget alkot, ami ellentmond az 1. lemmának. Legalább 1-gyel pedig a szélességi keresés tulajdonságai miatt össze kell lennie kötve. □

5. lemma: Minden 2. mélységi szinten lévő csúcs páros számú 3. szinten lévő csúccsal van összekötve. (Azaz a fokszáma páros – hiszen már korábban beláttuk, hogy ezeken kívül pontosan 2 élük van.)

A 5. lemma bizonyítása. Ez pont olyan helyzet, mint ami a 3. lemmánál állt elő. A 2. szinten lévő kiválasztott csúcsunk legyen x. Ha ez össze van kötve valakivel a 3. szinten, akkor ezt a két csúcsot ismerő csúcs csak a 3. szinten lehet, és kell is lennie (4. lemma).



Nem lehet az x által ismert, a harmadik szinten lévő csúcsok között olyan, amely x két ismerősével is össze van kötve, hiszen négyszög alakulna ki (ami ellentmond az 1. lemmának). Azaz az x által ismert csúcsok párosan vannak, és közülük mindenki pontosan 1 másikat ismer.

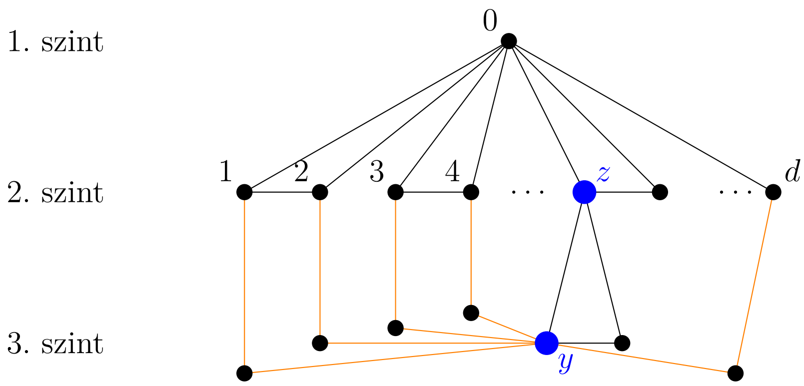
□

6. lemma: A 3. szinten minden csúcs fokszáma d.

A 6. lemma bizonyítása. Válasszuk ki a 3. mélységi szint egy tetszőleges csúcsát, legyen ez y. A 4. lemma miatt tudjuk, hogy pontosan 1 csúccsal van összekötve a 2. mélységi szintről, ez legyen z. y-t és z-t is ismernie kell valakinek (kell nekik egy közös ismerős), aki csak a 3. szinten lehet a 4. lemma miatt.

Tudjuk, hogy y-nak 1-től d-ig minden csúccsal kell hogy legyen közös ismerőse. Ez pontosan 2-re már teljesül: arra, amelyikkel össze van kötve (z), és arra, amelyik össze van kötve z-vel (a 3. lemma miatt tudjuk, hogy ebből 1 darab van).

Lássuk be, hogy a maradék $n-2$ csúccsal a közös ismerősei különböző, eddig nem említett, a 3. szinten elhelyezkedő csúcsok lesznek, és akkor belátjuk azt, hogy ez az y csúcs legalább d-ed fokú (hiszen 1 él összeköti z-vel, 1 a kettőjük közös ismerősével, és még $n-2$ a maradék $n-2$ csúccsal közös ismerőseivel, melyek összege d.)



Azt, hogy ez az $n-2$ közös szomszéd mind különböző csúcs, elég könnyű látni. A 4. lemma miatt tudjuk, hogy a 3. mélységi szinten található összes csúcs a 2. szinten lévők közül pontosan 1-gyel van összekötve, azaz 1 csúcs nem lehet közös ismerőse y-nak és 2 különböző 1-től d-ig számozott csúcsnak.

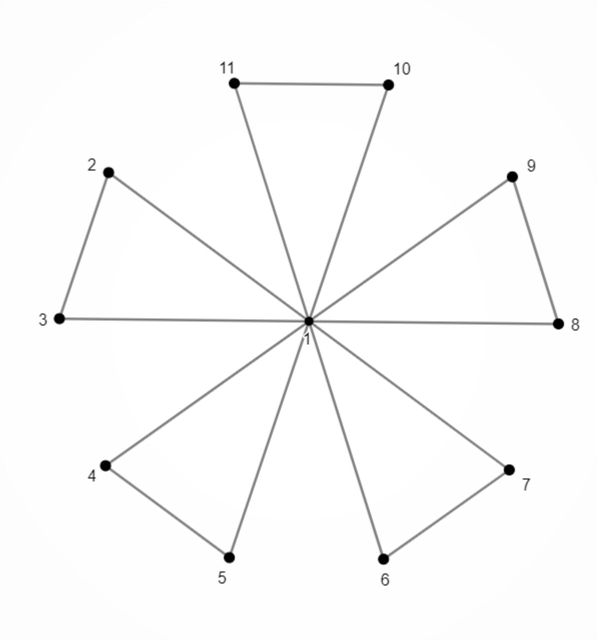
A bizonyítást úgy kezdtük, hogy kiválasztottuk az egyik legnagyobb fokú csúcsot (a 0. csúcsot), amely fokszáma d volt. Tehát y fokszáma se több, se kevesebb nem lehet d-nél. Ezzel beláttuk a 6. lemmát. □

7. lemma: A 2. szinten levő csúcsok fokszáma is d (feltéve, hogy a 3. szinten is van legalább egy csúcs).

A 7. lemma bizonyítása. Ezt belátni egészen egyszerű. Válasszuk ki a 3. mélységi szint egy tetszőleges csúcsát, és ismételjük meg az eddigi megoldásunkat azzal a különbséggel, hogy most ez a kiválasztott csúcs legyen a 0. kezdő csúcs. (Ezt megtehetjük, hiszen a 0. csúcs kiválasztásakor az volt az egyetlen feltételünk, hogy a gráfban ne legyen nála nagyobb fokszámú csúcs.) Ezt elvégezve azt kapjuk, hogy a kezdetben 1-től d-ig számozott csúcsok közül 1 kivételével (akit él kötött össze a kiválasztott csúccsal) mindegyik a 3.szintre került (ez a 4.lemmából és a szélességi keresés tulajdonságaiból látszik), azaz az ő fokszámuk is n kell hogy legyen. Ezt ismételjük meg egy 3. olyan csúccsal, akit nem köt össze él a mostani 1 kivétellel, és így mindenkiről beláttuk, hogy d-ed fokú. □

Ezzel mindhárom szint csúcsairól beláttuk, hogy fokszámuk d, azaz – ha nem ismer a 0 csúcs mindenkit – akkor a gráf d-reguláris. Ezzel a feladatot beláttuk.

Érdemes megjegyezni, hogy amennyiben n páratlan, akkor mindig létezik jó konstrukció[1]. Az alábbi ábra ezt 11-re mutatja be.



Minden más $2k + 1$ alakú számra (ahol $k \geq 1$) is lehet képezni valami hasonlót úgy, hogy egy csúcsot középre helyezünk, a többit egy körben köré párossával összekötve. Ezután az összes csúcsot összekötjük a középsővel és készen vagyunk. □

A barátság-tétel bizonyításának befejezése egy igen szép – de a lináris algebra egyetemen tanított eszköztárát használó – gondolatmenettel megtehető, amelyet az érdeklődök elolvashatnak például a *Bizonyítások a Könyvből* kötet *Barátokról és politikusokról című* fejezetében.

[1]Ha n páros, akkor pedig nincs a feltételeket teljesítő gráf. Be lehet látni ugyanis – egyszerű leszámlálással –, hogy amennyiben van harmadik szint, akkor csúcsok száma $n = d^2 - d + 1$ kell legyen.

3. Geometria

20. feladat (Fleiner Zsigmond)
Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Legyen AM az A-ból induló magasság. Vegyünk AM szakaszon egy P pontot. BP és AC egyenesek metszéspontja D. Hasonló módon CP és AB metszéspontja legyen E. Bizonyítsuk, hogy $DME\angle$ szögfelezője AM.

Bencsik Ádám megoldása. .

Lemma Ha Y, E, X, D pontok kollineárisak ebben a sorrendben és M nincs rajta az egyenesükön, akkor bármely kettő állításból következik a harmadik az alábbiak közül.

1. $(E, D; Y, X)$ harmonikus pontnégyes.
2. $YPX\sphericalangle = 90°$
3. CY felezi $EPD\sphericalangle$ szöget.

Lemma bizonyítása. Húzzunk párhuzamost X-ből YM-mel. Ekkor váltószögek miatt YEM háromszög hasonló XEK háromszöggl. Hasonló állású szögek miatt pedig YDM háromszög hasonló XDQ háromszöghöz. Vagyis,

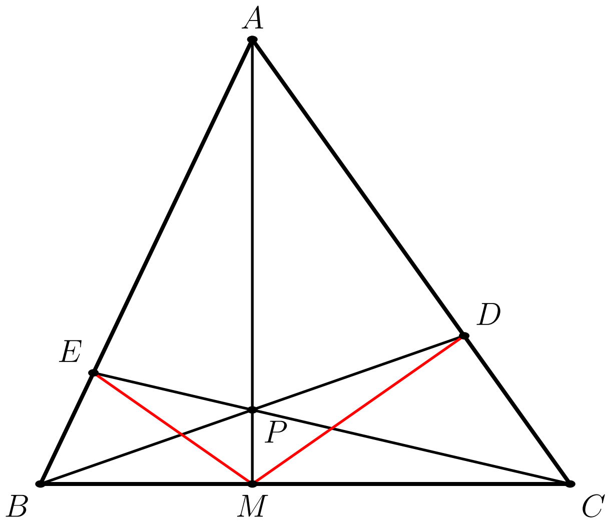
$$KX = \frac{EX}{EY} \cdot MY \quad \text{és} \quad QX = \frac{DX}{DY} \cdot CX.$$

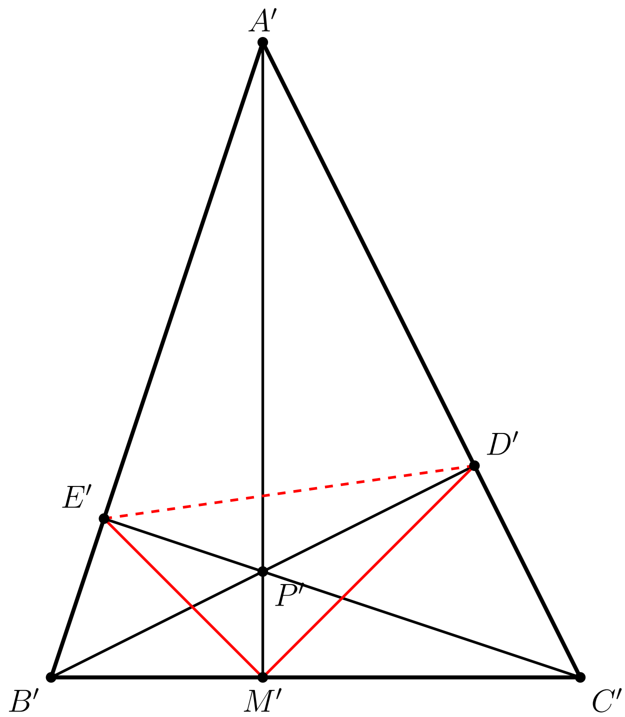
Vagyis $KX = XQ$ akkor és csak akkor ha $(E, D; Y, X) = -1$. Namost bármely két állítás teljesüléséből következik, hogy MXQ és MXK háromszögek egybevágóak, ami adja a harmadik állítást. □

Most térjünk a feladat megoldására. Húzzuk be az ED egyenest. Messe ez az egyenes a BC egyenest Y-ban és az AM szakaszt X-ben. Ekkor ismert állítás, hogy E, D, Y, X egy harmonikus pontnégyes, azaz $(E, D; Y, X) = -1$.

Namost tekintsünk $YMDXE$ alakzatot és vegyük észre hogy ez egy az egyben ugyanaz mint amiről a lemmánk szólt. Itt a lemma három állítás közül már teljesül kettő, $(E, D; Y, X) = -1$ és $YPX\sphericalangle = 90°$. Azaz teljesül a 3. állítás is, azaz $DME\sphericalangle$ szögfelezője AM. És ezzel beláttuk az állítást. □

Fleiner Tamás megoldása (lejegyezte: Hujter Bálint). Alkalmazzunk merőleges affinitást, melynek tengelye a BC egyenes, az affinitás arányát pedig úgy válasszuk meg, hogy $B'D'C'\sphericalangle$ éppen derékszög legyen (azt most nem részletezzük, hogy miért tudjuk így választani az affinitás arányát).





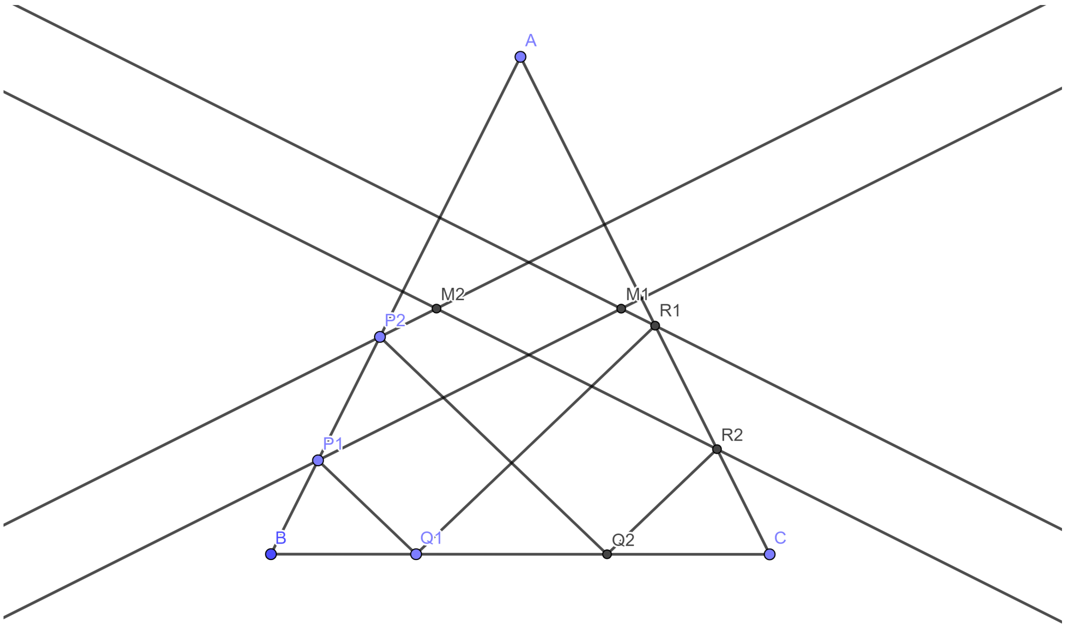
Így az $A'B'C'$ háromszögnek $A'M'$ és $B'D'$ is magasságvonala, tehát P' a magasságpontja, és így $D'E'$ is magasságvonal.

Tehát $M'D'E'$ háromszög az $A'B'C'$ talpponti háromszöge, amelyről közismert, hogy a magasságvonalak a szögfelezői. Tehát $E'M'A'\sphericalangle = D'M'A'\sphericalangle$, másképp mondva az $E'M'$ és $D'M'$ egyenesek egymásnak az AM'-re vett tükörképei.

Mivel az AM egyenes merőleges az affinitás tengelyére, ezért a merőleges affinitás tulajdonságai miatt már az EM és DM is egymás tükörképei kellettek legyenek az AM egyenesre – és éppen ezt kellett bizonyítanunk. $\square$

21. feladat (Bán-Szabó Áron)
Az ABC háromszög alakú biliárdasztal AB és AC oldalai egyenlő hosszúak. Az AB oldalon egy P pontban elhelyeztünk egy (pontszerű) golyót, melyet egy ütővel egyenes irányban meglöktünk. Ez először a BC oldalnak ütközött a Q pontban, majd az AC oldalnak az R pontban. Mutasd meg, hogy az ABC, APR háromszögek magasságpontjai és a Q pont egy egyenesen van.

Kun Ágoston megoldása. Fixáljuk a P pontból a golyó lökésének az irányát. Ekkor egy ilyen irányú ideális pontból való vetítéssel megkapjuk P_1 képét, Q_1-et a BC szakaszon, végül, ahogy továbbpattan a golyó, egy olyan irányú ideális pontra való vetítéssel kapjuk meg R_1-et az AC szakaszon.



Mivel ez egy projektív leképzés, így bármely (P_1, P_2), (R_1, R_2) párosokra teljesül, hogy egyenlő a két távolság. Most belátjuk, hogy az AP_iR_i hárömszögek magasságpontjai egy egyenesre esnek. Állítsunk merőlegest P_1 és P_2 pontokból az AC szakaszra, majd az R_1 és R_2 pontokból az AB szakaszra. Tudjuk, hogy a két-két párhuzamos egyenes távolsága megegyezik, és mivel a szemközti oldalak párhuzamosak, így ez csak egy rombusz lehet, vagyis bármely két magassápont egy rombuszt határoz meg, emiatt a magasságpontok egy egyenesre esnek, mert minden rombusz oldalai párhuzamosak vagy a BC szakasz merőlegesére, vagy az AC merőlegesére. Vagyis ha találunk három olyan P pontot, amire teljesül, hogy a Q, M_{abc}, M_{apr} pontok egy egyenesen vannak, akor készen vagyunk, mert 3 pont egyértelműen meghatároz egy projektív leképzést, ami miatt bármely 4. P pontra is teljesül, hogy ott is a 3 pont egy egyenesen lesz (Q, M_{abc}, M_{apr}).

- 1. pont: Amikor Q a BC szakasz felezőpontja, ekkor az ABC háromszög tükörtengelyén van mind a 3 pont.
- 2. pont: $P = B$, ekkor $Q = P = B$. Ekkor M_{abc} és M_{apr} is rajta van a B-ből az AC-re állított merőlegesen, ahol Q=B.
- 3. pont: $Q = C$, ekkor $R = Q = C$. Ez hasonlóan a 2. ponthoz, itt a 3 pont rajta van a C-ből az AB-re állított merőlegesen.

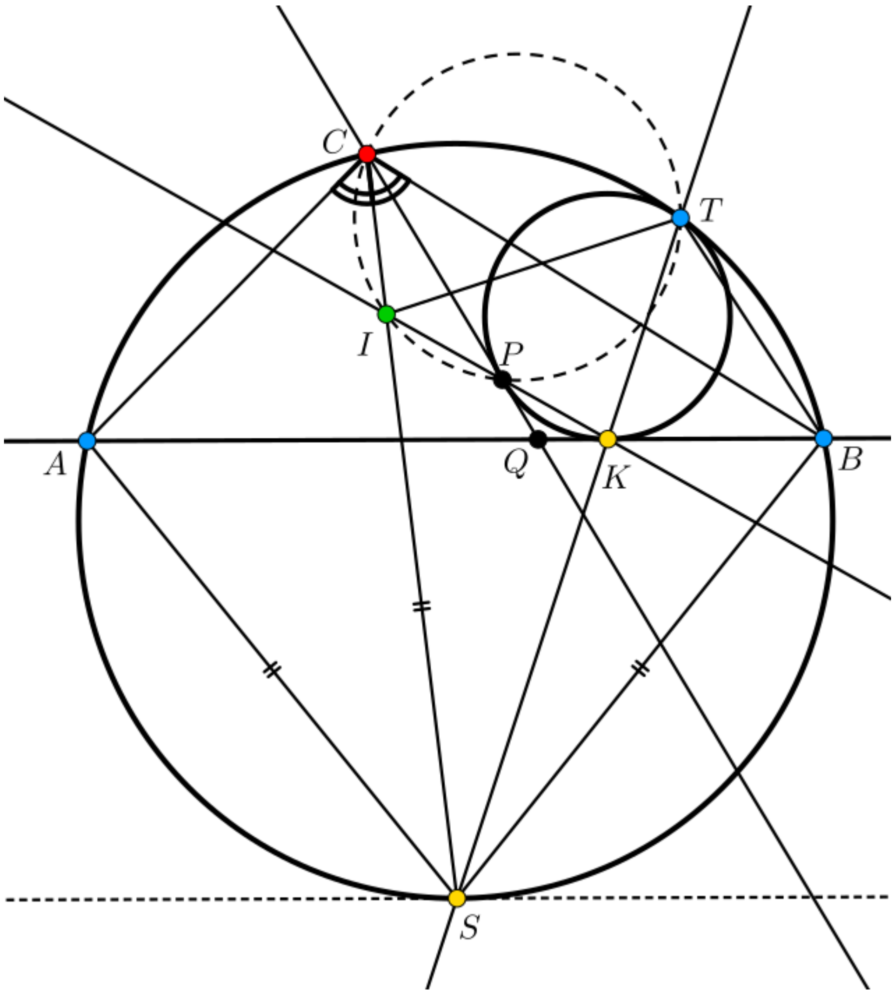
□

22. feladat (Le Julianna Phuonglinh)
Az $ABCD$ húrnégyszögben O_1 és O_2 az ABC, illetve az ABD háromszögbe írt kör középpontja. Az O_1O_2 egyenes a BC egyenest E-ben, az AD egyenest F-ben metszi.
a) Igazoljuk, hogy létezik egy olyan k kör, ami E-ben, illetve F-ben érinti a BC és az AD egyenest.
b) Mutassuk meg, hogy k érinti az $ABCD$ négyszög köré írt kört is.

Bán-Szabó Áron megoldása. Az **(a)** és **(b)** feladatokat egyszerre fogjuk bebizonyítani. Kezdjük viszont a körbe írt adott húrt érintő körökkel. Minden szögszámolásnál irányított szögekkel dolgozunk.

Adottak az ω, Ω körök, melyek T-ben érintik egymást, és Ω belsejében van ω. Ezen kívül az Ω körnek adott egy olyan AB húrja, ami érinti ω-t K-ban. Legyen C az Ω körnek egy A, B, T pontoktól különböző pontja úgy, hogy C és ω az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán legyenek. Az a C-n átmenő ω-hoz húzott érintő, amely az AB egyenest és az ω kört két olyan pontban érinti, melyek a TK egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, érintse ω-t P-ben és messe AB-t Q-ban. Célunk belátni a következő lemmát:

Lemma: Az ABC háromszög beírt körének középpontja rajta fekszik a PK egyenesen.



Lemma bizonyítása. A bizonyításhoz sok segédállítást fogunk használni. Legyen S az Ω körben a T-t nem tartalmazó (AB) ívnek a felezőpontja. Továbbá messe a CS egyenes a PK egyenest I-ben. Be fogjuk látni, hogy I az ABC háromszög beírt körének középpontja.

Állítás #1: $SKB\triangle \sim SBT\triangle$ és $SK \cdot ST = SB^2$.

Állítás #1 bizonyítása. Jelölje $\mathcal{H}$ azt a nagyítást, amely ω-t Ω-ba viszi. Mivel e két kör érinti egymást, ezért $\mathcal{H}$ középpontja T lesz. Legyen $\mathcal{H}$ alatt az AB egyenes képe az f egyenes, míg K képe K'. Ekkor $K' \in \Omega$ és f K'-ben érinti Ω-t. Ám mivel a nagyítás párhuzamosság tartó, f párhuzamos lesz AB-vel, ami a szimmetria miatt csak úgy lehetséges, ha f az AB ív felezőpontjában érinti Ω-t, így $K' = S$. Így a T, K, S pontok kollineárisak lesznek.

Jelölje $\psi_k(XY)$ a k körben az XY húrhoz tartozó kerületi szöget. Mivel $\mathcal{H}$ ω-t Ω-ba és TK-t TS-be viszi, a kerületi szög sem változott, azaz $\psi_\omega(TK) = \psi_\Omega(TS)$.
Ekkor $SKB\sphericalangle = TKB\sphericalangle = \psi_\omega(TK) = \psi_\Omega(TS) = TBS\sphericalangle$ (felhasználva az érintő szárú kerületi szögek tételét), így $SKB\triangle \sim SBT\triangle$, hiszen két szög közös. Tehát

$$\frac{SK}{SB} = \frac{SB}{ST} \quad \text{avagy} \quad SK \cdot ST = SB^2.$$

□

Állítás #2: A C, I, P, T pontok egy körön vannak.

Állítás #2 bizonyítása. Elégséges azt belátni, hogy $ICT\sphericalangle = IPT\sphericalangle$. Mivel C, I, S egy egyenesen van,
$ICT\sphericalangle = SCT\sphericalangle = \psi_\Omega(ST) = SBT\sphericalangle = SKB\sphericalangle = TKB\sphericalangle = \psi_\omega(TK) = TPS\sphericalangle = -TPI\sphericalangle = IPT\sphericalangle$. Itt használtuk az *Állítás* #1-et. □

Állítás #3: $SKI\triangle \sim SIT\triangle$ és $SK \cdot ST = SI^2$.

Állítás #3 bizonyítása. Az S-nél lévő szög most is közös, így elégséges belátni, hogy $IKS\sphericalangle = TIS\sphericalangle$. Vegyük észre, hogy $IKS\sphericalangle = PKT\sphericalangle = \psi_\omega(PT) = CPT\sphericalangle = \psi_{(CIPT)}(CT) = CIT\sphericalangle = TIS\sphericalangle$. Itt felhasználtuk a második állításban belátott állítást. Az egyenlőség ugyanúgy belátható a hasonlóságból:

$$\frac{SK}{SI} = \frac{SI}{ST} \iff SK \cdot ST = SI^2.$$

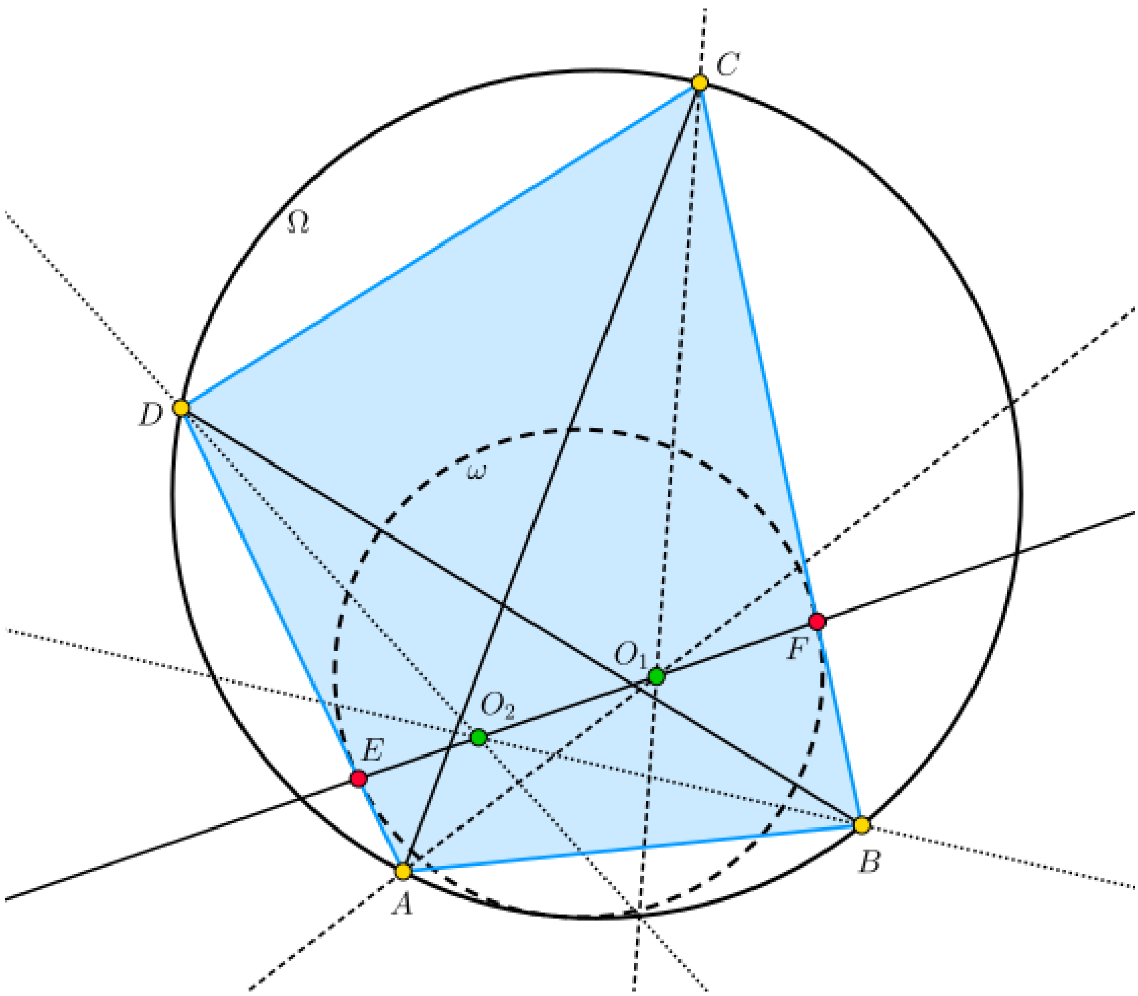
□

Most már mindent tudunk, hogy könnyen belássuk a lemmát. Az első és harmadik állítások szerint (és mivel S az AB ív felezőpontja) $SA^2 = SB^2 = SK \cdot ST = SI^2$ és mivel a távolságok mind nem negatívak, $SA = SB = SI$. Ismert, hogy az ABC háromszögben az A, B pontok és a beírt kör középpontja egy S középpontú körön vannak (ahol S a C-t nem tartalmazó AB ív felezőpontja). Mivel a keresett beírt kör középpont rajta kell lennie a CS szögfelezőn, ezért az S középpontú $SA = SB$ sugarú kör a beírt kör középpontjában fogja elmetszeni a CS egyenest. Ez pedig pont I. Készen vagyunk a lemmával. □

Mielőtt nagy lendülettel rátérnénk a feladatra, a lemmával kapcsolatosan fontos megjegyeznünk valamit. A lemmában szereplő P definíciója ugyanis kérdéseket von maga után. Hiszen a C-ből húzott két érintő közül csak az egyiket használtuk és nagyon nem mindegy melyiket! Ha a másik érintőt választjuk, akkor a PK egyenes nem megy át a beírt kör középpontján, hanem helyette a C csúcshoz tartozó körülírt kör középpontján fog átmenni. De hol használjuk ki a bizonyításban, hogy melyik érintőt választjuk?

A három darab állítás mind igaz marad, hiszen csak irányított szögekkel számolgattunk lényegében. tehát az utolsó gondolatokban lehet valami. Ahogy a bizonyításunkban szerepelt is, az S középpontú $SA = SB$ sugarú kör átmegy a beírt kör középpontján. De ezen kívül a C-hez tartozó hozzáírt körnek a középpontján is át fog menni. Tehát azt kell látni, hogy melyik érintőre lesz I a CS szakaszon belül, és melyiken kívül. Ezt az olvasóra bízom.

Nos akkor mostmár tényleg térjünk rá a feladatra. Legyen Ω azt $ABCD$ kör. Vegyük azt a ω kört, ami érinti az AD, BC egyeneseket, továbbá Ω belsejében van, és érinti azt. (Könnyű átgondolni, hogy ilyen létezik, ugyanis végtelensok olyan kör van, ami az AD, BC egyeneseket érinti, ezek középpontjai a két egyenes szögfelezőjén vannak, és a folytonosság miatt lesz pontosan egy olyan, ami Ω belsejében van és érinti azt). Ez az ω kör érintse az AD, BC egyeneseket az E', F' pontokban. Ekkor a lemmát alkalmazva az A és B pontokra, a BDA háromszög beírt körének középpontja rajta lesz az $E'F'$ egyenesen és hasonlóan az ABC háromszög beírt körének középpontja is rajta lesz az $E'F'$ egyenesen. Így $E = E'$ és $F = F'$. Készen is vagyunk.



□

23. feladat (Terjék András)
Egy egységnégyzet belsejébe egy konvex, n csúcsú sokszöget írunk. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható az n csúcsú sokszögnek 3 csúcsa úgy, hogy azok által meghatározott háromszög területe kisebb mint $\frac{80}{n^3}$ egység.

Füredi Erik megoldása. A beírt konvex n-szög kerülete legfeljebb az egységnégyzet kerülete, 4. Ehhez az oldalakat az egységnégyzet párhuzamos oldalpárjaiból a beírt sokszöggel átellenes irányban lévő oldalakra rávetítjük, minden oldalt kettőre, kivéve ha párhuzamos valamelyik oldalpárra, ekkor csak az abból az n-szöggel átellenesre. Ekkor a beírt n-szög egyik oldala sem hosszabb a vetületei összhosszánál, míg a vetületek összege nem hosszabb 4-nél, mert a négyzet kerületén mindenhova legfeljebb egy vetület jut.

Ez általánosan is igaz, konvex sokszögbe írt másik konvex sokszögnek nem lehet az eredetinél nagyobb a kerülete. A beírt konvex sokszög oldalait kitolhatjuk az eredetiére ennek belátásához.

Jelöljük x-szel a beírt n-szög kerületét. A konvex n-szög 3 csúcsából álló háromszögek közül a legkisebb területű 3 csúcsa sorra egymás mellett van az n-szög kerületén (például nézve egy, az n-ből két csúcsot összekötő szakaszon fekvő háromszögeket ilyen a legkisebb területű), nevezzük az ilyen, az n-szög kerületén 3 egymás melletti csúccsal rendelkező háromszögeket *kis* háromszögeknek. Lássuk be, hogy a *kis* háromszögek közül lesz $\frac{80}{n^3}$-nél kisebb területű, ehhez becsüljük felülről a kis háromszögek területeinek szorzatát, S-t, az n darab háromszög trigonometrikus területképleteivel, (mellyel egy háromszög területe két oldal hosszának szorzata szorozva a bezárt szög szinuszával osztva kettővel) úgy, hogy a (szinuszaikkal) használt belső szögek a konvex n-szög belső szögei és egy *kis* háromszögre a két oldal az n-szög két szomszédos oldala.

Ekkor a szorzatban a számlálóban minden oldal kétszer szerepel, így az oldalhosszok szorzatának négyzetének maximumával becsüljük felül ezt a részt. A kerület x, ez a nemnegatív oldalhosszok összege, így a szorzat jól ismert módon (a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből) akkor a legnagyobb, ha egyenlők az oldalhosszok, legfeljebb $\left(\frac{x}{n}\right)^n$, így $x \leq 4$ miatt legfeljebb $\left(\frac{4}{n}\right)^n$, az oldalhosszok szorzatának négyzete, mely a *kis* háromszögek területeinek szorzatában szerepel, legfeljebb $\left(\frac{4}{n}\right)^{2n}$.

A konvex n-szög belső szögeinek szinuszainak szorzata is benne van a számlálóban, e szögek 0 és π közt vannak (radiánban), így mivel a szinusz függvény e intervallumon konkáv (a második derivált nemnegatív) és nemnegatív, a szinuszok (összege és még inkább) szorzata akkor a legnagyobb, ha egyenlőek a szögek. A szögek átlaga $\frac{n-2}{n}\pi$, így a szinuszok szorzata, mely szerepel a *kis* háromszögek területei szorzata számlálójában, legfeljebb

$$\sin^n\left(\frac{n-2}{n}\pi\right) = \sin^n\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(használva a $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$ azonosságot).

Mivel $0 < \frac{2\pi}{n} < \pi$, így $\frac{2\pi}{n} > \sin\frac{2\pi}{n}$, ezért a szinuszok szorzatánál $\left(\frac{2\pi}{n}\right)^n$ nagyobb. Végül a *kis* háromszögek szorzatának nevezőjében n db 2-es szorzata, 2^n van.

Ebből a *kis* háromszögek területeinek szorzatára, S-re teljesül, hogy

$$S < \frac{\left(\frac{4}{n}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{2\pi}{n}\right)^n}{2^n};$$

így az n darab *kis* háromszög közt van olyan, amelynek területe kisebb ennek n. gyökénél, azaz van olyan *kis* háromszög, melynek területe kisebb, mint

$$\frac{\left(\frac{4}{n}\right)^2 \cdot \frac{2\pi}{n}}{2} = \frac{16\pi}{n^3}.$$

$16\pi < 80$ miatt ez biztosítja a feladat állításához elegendő olyan $\frac{80}{n^3}$-nél kisebb területű háromszög létét (sőt erősebb), melynek csúcsai az egységnégyzetbe beírt konvex n-szög csúcsai közül valók. A feladat állítását bebizonyítottuk. $\square$

4. Számelmélet

24. feladat (Reimann Kristóf)
Legyen az egész számok egy végtelen sorozata $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, melyre teljesül az, hogy végtelen sok pozitív és negatív szám szerepel benne, továbbá bármely n-re, a sorozat első n eleme teljes maradékrendszert alkot mod n. Belátandó, hogy minden egész szám pontosan egyszer szerepel ebben a sorozatban.

Farkas Iza megoldása. Először lássuk be, hogy egy szám nem szerepelhet több mint egyszer a sorozatban! Ha $a_a = a_b$, akkor egy olyan n esetében, ami nagyobb, mint a és b, nem alkothat teljes maradékrendszert az első n elem, hiszen ekkor

$$a_a \equiv a_b \quad mod\, n.$$

Vagyis még azt kell belátnunk, hogy minden egész szám szerepel ebben a sorozatban.

Nézzük meg, hogy mi lehet az n. tag, ha már adott az első $n-1$ tag. A szám n-nel való maradéka már adott, hiszen n-ből $n-1$ lehetséges maradék már az előző tagok miatt foglalt. Továbbá

$$|a_n - a_k| < n$$

ahol $k < n$, különben n vagy egy nála nagyobb szám maradékrendszerében a_n és a_k ugyanazt a maradékot adná. Szóval $a_{n-1} - n < a_n < a_{n-1} + n$, azaz $2n-1$ egymás utáni szám közül valamelyik lesz a_n, kivéve persze, hogy a_{n-1} már nem lehet. Látható, hogy a többi $2n-2$ szám között minden n-nel való maradék pontosan kétszer fordul elő, kivéve a_{n-1} maradéka, ami egyszer sem. Vagyis pontosan két olyan egész szám van, aminek megfelelő az n-nel való maradéka és a_{n-1}-gyel való különbsége nem túl nagy.

Nézzük meg, hogy a két szám közül melyik lehet a_n. Tudjuk, hogy a két szám különbsége n, hiszen ugyanaz az n-nel való maradékuk. Így ha a sorozat valamelyik tagja kisebb vagy nagyobb mindkét lehetséges számnál, akkor egyikkel való különbsége nagyobb lesz, mint n, tehát egyértelműen a másik szám lesz a megfelelő, ami emiatt a_{n-1} és egy másik szám közé fog esni. Ha nincs ilyen szám, az azt jelenti, hogy mind az $n-1$ tag a két lehetséges n. tag közé esik, és mivel ezek különbsége n, így ez $n-1$ egymás utáni számot jelent, és bármelyik szám is lesz az n. tag a kettő közül, az első n tag is egymást követő számokból fog állni. Ha az első $n-1$ tag közül mindkét lehetséges számhoz találunk olyat, amivel való különbsége legalább n, akkor a sorozat nem folytatható, tehát ezzel nem kell foglalkoznunk.

Ha a sorozat első tagja k, akkor a második tag $k-1$ vagy $k+1$ kell, hogy legyen. Különben egy 2-nél nagyobb számmal való maradéka ugyanaz lenne az első két tagnak. Ebből látszik, hogy már itt egymás utáni tagokból áll a sorozat, ami a későbbiekben is változatlan marad. Hiszen ha az első $n-1$ tag egymásutáni, akkor tudjuk, hogy az első n is. Mivel végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív szám szerepel a sorozatban, így minden egész szám szerepel a sorozatban. □

25. feladat (Rubint Gergő)
Az n és k 1-nél nagyobb pozitív egész számok, és $n < 2^k$.
Bizonyítsuk be, hogy mindig ki lehet választani úgy $2k$ darab n-nel nem osztható egész számot, hogy bárhogy is osztjuk szét két halmazba ezt a $2k$ számot, valamelyik halmazban lesz valahány szám, amelyek összege osztható lesz n-nel.

Baski Bence megoldása. Először tegyük fel, hogy n nem kettőhatvány. Legyenek a számaink:

$$2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{k-2}, 2^{k-1} \quad \text{és} \quad -2^0, -2^0, -2^1, \ldots, -2^{k-3}, -2^{k-2}.$$

Ez összesen $k + k = 2k$ darab szám.

Indirekt tegyük fel, hogy valaki két halmazba tudta osztani ezeket a számokba úgy, hogy egyik halmazban sincsenek olyan számok, amelyek összege osztható n-nel.

Nevezzük első csoportnak azt, amelyikbe 2^0 kerül, így a kettő darab -2^0 a második csoportba kellett kerülnie. Ezek összege $-2^0 + (-2^0) = -2^1$, így 2^1 megint az első csoportba, míg negatív megfelelője a másodikba kerül, ahol a számok összege, ezzel -2^2 lesz. Ez így fog folytatódni, hogy mivel a második csoportban -2^x lesz az összeg, ezért 2^x az első csoportba kerül, így -2^x a másodikba és ez által az összeg -2^{x+1} lesz, tehát a két csoportunk a negatív és a pozitívak csoportja lesz, de tudjuk, hogy minden szám előállítható 2^k-ig az ennél kisebb kitevőjű kettőhatványok egyszeri felhasználásával, tehát ekkor is lesz n-nel osztható összeg.

Ha n kettőhatvány (legyen $n = 2^x$, ahol $x < k$), akkor az eddig megoldás csak azért nem működik, mert n-nel nem osztható számokat kért tőlünk a feladat. Ekkor legyenek számaink:

$$2^0, 2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{x-2}, 2^{x-1} \quad \text{és} \quad -2^0, -2^0, -2^1, \ldots, -2^{x-3}, -2^{x-2}.$$

Ez összesen $(x + 1) + (x + 1) = 2x + 2$ darab szám. Ha $x < k - 1$, akkor még hozzáveszünk $2k - 2x - 2$ darab 2^0-t.

Itt annyi változik, hogy van még legalább egy 2^0, ami csak az első csoportba kerülhet az első 2^0 tag mellé, a többi viszont ugyanaz, így a két csoport megint csak a pozitív és a negatív lehet és a pozitívban az összeg pont az x-nél kisebb kitevőjű kettőhatványok összegénél 1-gyel nagyobb, ami éppen 2^x. □