1. Ceva csapat

1.1. Biczó Benedek

BiB/1. A és B egy játékot játszanak, amiben egy 2020×2020-as mátrixot töltenek ki. A játékot A kezdi. Egy lépésben mindenki beír egy valós számot egy mezőbe. Amikor betelt a mátrix A nyer ha a mátrix determinánsa nem 0, B nyer ha 0. Kinek van nyerő startégiája?

BiB/2. A csupaegy számok olyan pozitív egészek, amelyek (10-es számrendszerben) csak egyesből állnak. Találjuk meg az összes valós együtthatójú p polinomot, amire igaz, hogyha n csupaegy szám akkor $p(n)$ is.

BiB/3. Bizonyítsuk be, hogy egy gömbön levő 5 pont közül ki lehet választani 4-et, amelyek egy félgömbön vannak.

BiB/4. Egy játékban el szeretnénk jutni 0-ról az 1-re, a számegyenesen jobbra ugrálva. a-ról b-re ugrani (ahol $b > a$ és a és b valós) $b^3 - ab^2$-be kerül. Mely c valós számok esetén lehet megtenni az utat véges lépésben úgy, hogy az útiköltség épp c.

BiB/5. Egy táblán 1-től 20-ig fent vannak az egész számok. Egy lépésben letörölhetjük a-t és b-t, hogy felírhassuk $a + b + ab$-t. Mely számok lehetnek fent a táblán utolsóként?

BiB/6. Legyenek m és n pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!n!}{m^m n^n}.$$

BiB/7. Adjuk meg az összes lehetséges értékét $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$-nek, ahol A, B és C nemnegatív egészek.

1.2. Bukva Dávid

BD/1. Van egy véges hosszú pozitív egész számokból álló sorozat. Van továbbá minden számhoz egy ember aki csak annyit tud, hogy hanyadik számot kapta a sorozatból és hogy mi ez a szám.
Az embereket egyesével beküldjük egy szobába ahol van egy gomb amit valahányszor megnyomhatnak. A céljuk, hogy amikor az utolsó ember végez, akkor egy másik ember előzetes összebeszélés alapján a sorozat elemeit sorrenddel együtt kitalálja, úgy, hogy csak azt tudja, hogy hányszor volt megnyomva összesen a gomb. Lehetséges-e ez?

BD/2. Keressük meg az összes olyan 1-nél nagyobb n természetes számot, amelyre az $1, 2, 3, \ldots, n$ számoknak létezik olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorrendje, hogy az

$$a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2\cdots a_n$$

szorzatok mind különböző maradékot adnak n-nel osztva.

BD/3. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számhoz található olyan n^2-nél nem nagyobb, n-nel osztható pozitív egész szám, amelynek 10-es számrendszerbeli alakjában nem szerepel mind a tíz számjegy.

BD/4. Egy összejövetelen 31 ember vett részt. Közülük bármely 15-höz van a társaságnak egy további tagja, aki mindegyiküket ismeri. Bizonyítandó, hogy van olyan tagja a társaságnak, aki a résztvevők mindegyikét ismeri. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

BD/5. Adjunk meg olyan racionális együtthatós p polinomot, amelyre

$$p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2}.$$

BD/6. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív egész számok kiszínezhetők 2008 színnel úgy, hogy mindegyik színt felhasználjuk, és valahányszor $3a + 5b = 7c$, akkor a, b és c között van két ugyanolyan színű.

BD/7. 11 000 űrhajósból álló csoportot készítettek fel a Mars-utazásra. Tudjuk, hogy bármely 4 űrhajós közül kiválasztható 3 olyan, akik megfelelő személyzetet alkotnak a leszálló modulhoz. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható 5 űrhajós úgy, hogy közülük bármelyik 3 megfelelő személyzet legyen.

BD/8. Két egyenes körkúp tengelye párhuzamos, a nyílásszögük különböző. Bizonyítsuk be, hogy közös pontjaik egy gömbön vannak.

1.3. Le Julianna PhL

LJ/1. Legyen $ABC_\triangle$ magasságpontja M, és a beírt kör középpontja I. Legyenek az $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ pontok az AB, AC, BC, CA, CB oldalakon úgy, hogy

$$AA_1 = AA_2 = BC, BB_1 = BB_2 = CA, CC_1 = CC_2 = AB.$$

Tegyük fel, hogy B_1B_2 A'-ben metszi C_1C_2-t, C_1C_2 B'-ben metszi A_1A_2-t és A_1A_2 C'-ben B_1B_2-t.
a) Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'_\triangle$ területe kisebb vagy egyenlő az $ABC_\triangle$ területével!
b) Legyen J az $A'B'C'_\triangle$ körülírt körének középpontja. AJ R-ben metszi BC-t, BJ S-ben metszi CA-t és CJ T-ben AB-t. Tegyük fel, hogy $(AST), (BTR), (CRS)$ K-ban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy $HIJK$ parallelogramma, ha $ABC_\triangle$ nem egyenlőszárú!

LJ/2. Egy országban a városok közötti közlekedés vonaton és busszal lehetséges. A vasúttársaság és a buszvállalat is bizonyos várospárok között közlekedtet járatokat, ám két város között nem feltétlenül jár mindkét irányba járat. Tudjuk, hogy bárhogyan is választunk ki két várost, el lehet jutni egy fajta közlekedési eszközön (esetleges átszállásokkal) az egyikből a másikba (de a másikból az egyikbe már nem feltétlenül). Bizonyítsuk be, hogy van olyan város, amelyből bármely másik város elérhető egyféle közlekedési eszközzel úgy, hogy a különböző városokba jutás eszköze más-más lehet.

LJ/3. Van 1000 pénzérménk, de tudjuk, hogy közülük 100 hamis. Ismerjük a valódi érmék súlyát, és tudjuk, hogy a hamis érmék könnyebbek, mint a valódiak, de a hamis érmék súlyai különbözők is lehetnek. Egy egykarú mérleggel szeretnénk találni egy hamis érmét. Minden lépésben megmérhetjük néhány érme súlyának összegét, ezzel megállapíthatjuk, hogy a mérlegre tett érmék között van-e hamis. Hány mérésre van szükségünk, hogy biztosan találjunk egy hamis érmét?

LJ/4. Az $ABCD$ húrnégyszögben O_1 és O_2 az ABC, illetve az ABD háromszögbe írt kör középpontja. Az O_1O_2 egyenes a BC egyenest E-ben, az AD egyenest F-ben metszi.
a) Igazoljuk, hogy létezik egy olyan k kör, ami E-ben, illetve F-ben érinti a BC és az AD egyenest.
b) Mutassuk meg, hogy k érinti az $ABCD$ négyszög köré írt kört is.

LJ/5. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n létezik, amelyre igaz, hogy az $n^4 + n^2 + 1$ legnagyobb prím osztója megegyezik az $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$ legnagyobb prím osztójával!

LJ/6. Felbontható-e az 1,2,...,2010 halmaz páronként diszjunkt, ötelemű halmazokra úgy, hogy az elemek összege mindegyik ötelemű halmazban osztható legyen 2011-gyel?

LJ/7. Legyenek a, b, c, d valós számokra igaz, hogy $a + b + c + d = 6$ és $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Bizonyítsuk be, hogy

$$36 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leq 48$$

LJ/8. Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre az

$$x^3 + 3px^2 + (4p - 1)x + p = 0$$

egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1.

1.4. Reimann Kristóf

RK/1. Legyen S általános helyzetű pontok egy véges halmaza. Továbbá egy tetszőleges P konvex sokszögre, amelynek összes csúcsa S-ben van, jelölje $a(P)$ a sokszög csúcsainak a számát, $b(P)$ pedig jelölje az olyan S-beli pontok számát, amelyek szigorúan kívül esnek P-n. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges x valós számra:

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

Ahol a szummában P végigfut az összes ilyen konvex P sokszögön. Megjegyzés: Egy szakaszt, egy pontot, és az üres halmazt rendre vehetjük konvex 2,1, és 0 szögnek.

RK/2. Adott egy legalább 3 elemű véges S ponthalmaz, amelyben nem minden pont kollineaáris. Belátandó, hogy van olyan egyenes, amely pontosan két S-beli pontot tartalmaz.

RK/3. Legyen $x, y \in \mathbb{Z}^+$, melyekre teljesül, hogy $xy | x^2 + y^2 + 1$. Belátandó, hogy ekkor

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = 3.$$

RK/4. Van-e olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely racionálisokhoz irracionális, irracionálisokhoz racionális értékeket rendel?

RK/5. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amely minden (a, b) számpárra kielégíti az alábbi függvényegyenletet:

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

RK/6. Legyenek A_1, A_2,...,A_n az $\{1, 2, ..., M\}$ halmaz páronként egymást nem teljes egészében fedő részhalmazai. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\binom{M}{a_i}} \leq 1, \qquad \text{ahol } a_i = |A_i|.$$

RK/7. Legyen az egész számok egy végtelen sorozata $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, melyre teljesül az, hogy végtelen sok pozitív és negatív szám szerepel benne, továbbá bármely n-re, a sorozat első n eleme teljes maradékrendszert alkot mod n. Belátandó, hogy minden egész szám pontosan egyszer szerepel ebben a sorozatban.

RK/8. Adottak olyan a, b, c pozitív valósok, melyek szorzata 1. Belátandó, hogy ekkor

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

fennáll.

2. Csapatnév generálása folyamatban

2.1. Farkas Iza

FI/1. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója 36 egység. Az egyik befogóra, a derékszögű csúcstól indítva, egymáshoz csatlakozó szabályos háromszögek végtelen sorozatát rajzoljuk úgy, hogy a beírt háromszögek harmadik csúcsa mindig illeszkedik az átfogóra, és ezen csúcsokkal szemközti oldalaik kitöltik a befogót.
Határozzuk meg a szabályos háromszögek területének összegét

FI/2. Három pozitív egész szám összege 2010, reciprokainak összege pedig $\frac{1}{58}$.
Melyek ezek a számok?

FI/3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{35}{12}, \qquad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{7}{12}.$$

FI/4. Jelölje a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát, u, v, w pedig a beírt kör középpontjának a velük szemben levő csúcsoktól vett távolságát. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) \le 3\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}\right).$$

FI/5. Jelöljön x egész számot. Mutassuk meg, hogy ha a $\dfrac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2}$ kifejezés értéke egész, akkor négyzetszám.

FI/6. Jelölje az n és k pozitív egészek legnagyobb közös osztóját (n, k), legkisebb közös többszörösét pedig $[n, k]$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c pozitív egészek esetén az $[a, b], [b, c], [c, a]$ számok legnagyobb közös osztója megegyezik az $(a, b), (b, c), (c, a)$ számok legkisebb közös többszörösével.

FI/7. Egy futó 30 kilométert fut le úgy, hogy sebessége km/h-ban mérve mindig annyi, amennyi km még hátravan a távból. Hányad részét kell még megtennie a távnak 1 óra után?

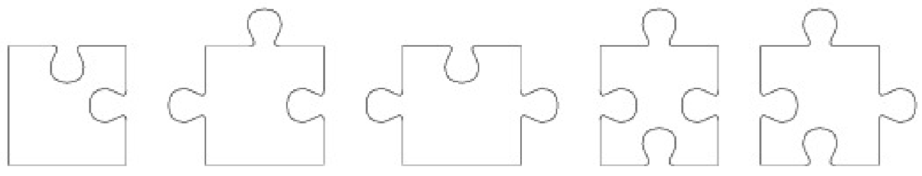
FI/8. A tér egy pontjából 4 félegyenes indul ki amelyek páronként nagyságú α szöget zárnak be. Határozd meg $\sin\alpha$ értékét!

FI/9. Egy sorozat elemei pozitív egész számok, első két eleme az 1 és a 2. A sorozat semelyik két különböző elemének összege nem eleme a sorozatnak.
Bizonyítsuk be, hogy bármely k természetes szám esetén a sorozat k-nál kisebb elemeinek száma legfeljebb $\frac{k}{3}+2$.

2.2. Lazur Zsófia

LZs/1. Egy kör kerületére felírunk 2007 természetes számot. Lehetséges-e, hogy bármely két szomszédos szám közül a nagyobbat a kisebbel elosztva mindig prímszámot kapunk?

LZs/2. „850 darabos” téglalap alakú kirakós játékunk igazából 851 darabból áll. Minden egyes darab az ábrán látható 5 mintadarab valamelyikével egyezik meg. Hány (E) típusú darab van a játékban?



LZs/3. Mely $m > 1$ egészekre létezik az $1, 2, ..., m$ számoknak olyan $a_1, a_2, ..., a_m$ sorrendje, hogy az $a_1, a_1+a_2, ..., a_1+a_2+...+a_m$ összegek mind különböző maradékot adnak m-mel osztva?

LZs/4. Legyen $a \geq b \geq c > 0$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

LZs/5. Tíznél több egységnyi fakockából egy nagy, tömör kockát építettünk, majd a nagy kocka minden lapját befestettük. Ezután különválasztottuk a többitől azokat a kis kockákat, amelyeknek egyetlen lapja sincs befestve. Lehet-e ezen kockák száma többszöröse a többi kocka számának?

LZs/6. Az r és s pozitív számok összege 1. Mutassuk meg, hogy

$$r^r \cdot s^s + r^s \cdot s^r \leq 1.$$

LZs/7. Mely k pozitív egész esetén fordul elő az 1 az (a_n) sorozat elemei között, ha $a_1 = k$, és $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, ha a_n páros, illetve $a_n + 1 = a_n + 5$, ha a_n páratlan?

LZs/8. Felbontható-e az $\{1, 2, ..., 2010\}$ halmaz páronként diszjunkt, ötelemű halmazokra úgy, hogy az elemek összege mindegyik ötelemű halmazban osztható legyen 2011-gyel?

2.3. Móricz Réka

MR/1. A négyzet alakú medencében úszkáló Jerry el szeretne menekülni a parton rá leső Tom elől. Tom nem tud úszni, lassabban fut, mint Jerry, viszont négyszer olyan gyorsan fut, mint ahogy Jerry úszik. Megmenekülhet-e mindig Jerry?

MR/2. Egy iskolai sakkversenyen mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Minden játékos ugyanannyi pontot szerzett a lányok ellen, mint a fiúk ellen.
Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma négyzetszám.
(Győzelemért 1; döntetlenért 0,5; vereségért 0 pont jár.)

MR/3. Az a és b nemnegatív számokra $a^3 + b^3 = 2ab$ teljesül. Következik-e ebből, hogy

$$a^2 + b^2 \leq 1 + ab\ ?$$

MR/4. Az első n pozitív egész számot leírjuk sorban egymás mellé. Alájuk, egy másik sorba ugyanezeket a számokat írjuk más sorrendben. Lehetséges-e, hogy az egymás alatt lévő számok összege négyzetszám, ha **a)** $n = 9$, **b)** $n = 11$?
c) $12 \leq n \leq 25$ esetén az elrendezés a feltételnek megfelelően teljesíthető.
Mi a helyzet akkor, ha $26 \leq n$?

MR/5. Egy teremben 11-en vannak. Tudjuk, hogy akárhogyan is választunk ki közülük kettőt, a többiek közül pontosan egy ismeri mindkettőjüket.
Mutassuk meg, hogy van a teremben olyan, aki mindenki mást ismer.

MR/6. Az a, b, c olyan egész számok, hogy az $x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomnak három különböző pozitív egész gyöke van, melyek prímszámok, továbbá az $ax^2 + bx + c$ polinomnak van pozitív egész gyöke. Mutassuk meg, hogy $|a|$ összetett szám.

MR/7. Igazoljuk, hogy tetszőleges háromszög esetén

$$9r \leq m_a + m_b + m_c$$

(r a beírt kör sugarát jelöli)

MR/8. Száz szám összege 0. Bizonyítsuk be, hogy a közülük kiválasztható számpárok között legalább 99 olyan van, amelyben a két tag összege nem negatív.

2.4. Tot Bagi Márton

TBM/1. Milyen alapú számrendszer esetén létezik olyan 1-nél nagyobb pozitív egész, amely megegyezik a számjegyei összegének a négyzetével?

TBM/2. Aladár és Béla a 81 lapos pakliból felváltva kiválasztanak egy-egy SET kártyát és leteszik az asztalra. Az veszít, aki után az asztalon szereplő kártyák között először lesz SET. Aladár kezd.
Kinek van nyerő stratégiája?

TBM/3. Oldjuk meg a $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$ egyenletet.

TBM/4. Minden 1-nél nagyobb egész a_0-hoz definiáljuk az $a_0, a_1, a_2...$ sorozatot úgy, hogy minden $n \leq 0$ esetén:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ha } \sqrt{a_n} \text{ egész,} \\ a_n + 3, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

Keressük meg az összes olyan a_0-t, ahol létezik olyan A szám, hogy $a_n = A$ végtelen sok n-re.

TBM/5. A számítógép képernyőjén egy 98×98-as sakktábla látható, a szokásos módon színezve. Az egér segítségével kijelölhetünk tetszőleges olyan téglalapot, amelyet a sakktábla vonalai határolnak, majd rákattintva az ebben a téglalapban lévő mezők színe ellenkezőjére változik. Minimálisan hány kattintás szükséges ahhoz, hogy a sakktábla teljesen egyszínű legyen?

TBM/6. Egy börtönben n rab tartózkodik. Az unatkozó börtönőrök azt találják ki, hogy az udvaron mindegyik rab fejére piros vagy kék sapkát tesznek úgy, hogy senki se lássa, a saját fejére milyen színű kerül. Miután a rabok jól megnézték egymást (minden rab a sajátján kívül az összes többi rab sapkáját látja), mindegyiküknek le kell írnia egy-egy lapra, hogy milyen színű sapka van a fején. Aki helyesen tippel, azt másnap is kiengedik az udvarra. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre létezik a raboknak olyan stratégiája, amelyet követve legalább k rab biztosan kimehet másnap az udvarra?

TBM/7. Egy $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör k, az ABC háromszög beírt körének középpontja P, az ABD háromszögé pedig Q. Legyen a k kör BC ívének felezőpontja E, a DA ívének felezőpontja pedig F. Mutassuk meg, hogy PQ párhuzamos EF-fel.

TBM/8. Az n milyen pozitív egész értékeire van olyan egyszerű gráf, amelynek minden csúcsa legfeljebb n-edfokú és minden $1 \leq i \leq n$ esetén i darab i-edfokú csúcsa van?

3. Klotild

3.1. Csaplár Viktor

CsV/1. A táblára két pozitív egész szám van felírva: m és n. Minden lépésben letöröljük az egyik számot, és helyette felírjuk a két szám összegét, szorzatát, vagy hányadosát (ha egész). Adjátok meg m és n függvényében az összes számpárt, amelyek néhány lépés után a táblán állhatnak.

CsV/2. Adott az ABC háromszög. Az AB és AC szakaszok belsejében legyenek az X és Y pontok. Legyen Z a BY és CX egyenesek metszéspontja. Bizonyítsátok be, hogy $[BZX] + [CZY] > 2[XYZ]$, ha $[ABC]$ az ABC háromszög területét jelöli.

CsV/3. Adott az alábbi egyenletrendszer (ahol p valós paraméter):

$$x^2 - 3y + p = z \qquad y^2 - 3z + p = x \qquad z^2 - 3x + p = y$$

a) Oldjátok meg az egyenletrendszert $p \geq 4$ esetén.
b) Biz. be, hogy ha $p \in \langle 1, 4)$, akkor $x = y = z$.

CsV/4. Keressétek meg az $\dfrac{1}{x+y} + z = 1 \qquad \dfrac{1}{y+z} + x = 1 \qquad \dfrac{1}{z+x} + y = 1$ egyenletrendszer összes valós megoldását.

CsV/5. Az $\{1, 2, 3, ..., 12\}$ halmaz egy négyelemű P halmazára jelölje

$$Q = \{3x : x \in P\} \quad \text{és} \quad R = \{4x : x \in P\}.$$

Határozzátok meg az összes olyan P halmaz számát, amelyre a P, Q, R halmazok elemei 13-mal való osztása után megkapjuk az összes nullától különböző maradékot.

CsV/6. Az a és b pozitív egészekre $b^2 = a^2 + ab + b$.
Bizonyítsátok be, hogy b egy pozitív egész négyzete.

CsV/7. Adott az ABC egyenlőszárú háromszög, melynek BC alapján fekszik a D pont. Az E és F pontok az AB, illetve AC oldalak belsejében vannak, továbbá $\angle BED = \angle DFC > 90°$. Bizonyítsátok be, hogy az ABF és AEC körök A-tól különböző metszéspontja rajta van az AD egyenesen.

CsV/8. Minden pozitív egész k-ra jelölje $P(k)$ azon $4k$-jegyű pozitív egészek számát, melyek csak a 0 és a 2 számjegyeket tartalmazzák, továbbá oszthatóak 2020-szal. Bizonyítsátok be, hogy

$$P(k) \geq \binom{2k-1}{k}^2$$

valamint adjátok meg az összes olyan k-t, amire egyenlőség áll fenn.

3.2. Hegedűs Dániel

HD/1. Az a, b, c, x, y, z valós számokra teljesül, hogy $a \geq b \geq c > 0$ és $x \geq y \geq z > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

HD/2. Igazoljuk, hogy az $x^7 - 14x^6 + 21x^5 - 70x^4 + 35x^3 - 42x^2 + 7x - 2 = 0$ egyenlet egyetlen valós gyöke $x = 2 + \sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{9} + \cdots + \sqrt[7]{3^6}$.

HD/3. Igazoljuk, hogy tetszőleges m, t pozitív egész számok esetén teljesül a következő azonosság:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{t+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{t}{k} \cdot 2^k.$$

HD/4. Van egy zsebrádiónk, amely két ceruzaelemmel működik. A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezünk kettőt a készülékbe, és ha az szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szól, akkor legalább az egyik rossz. Legalább hány kísérletre van szükség ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

HD/5. Az ABC hegyesszögű háromszög belsejében, az A csúcsból induló szögfelezőn felvettük az M pontot. Az AM, BM, CM egyeneseknek a körülírt körrel való második metszéspontja rendre A_1, B_1 és C_1. Az AB és a C_1A_1 egyenesek az L pontban, az AC és a B_1A_1 egyenesek az N pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az LN szakasz párhuzamos BC-vel.

HD/6. A nem egyenlő szárú ABC háromszög körülírt és beírt körének középpontja O, illetve I. A beírt kör a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. Az FD és AC egyenesek metszéspontja P, a DE és AB egyenesek metszéspontja Q. Az EP és FQ szakaszok felezőpontja M, illetve N. Bizonyítsuk be, hogy MN merőleges OI-re.

HD/7. Keressük meg az összes olyan 1-nél nagyobb n természetes számot, amelyre az $1, 2, 3, \ldots, n$ számoknak létezik olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorrendje, hogy az $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots,$ $a_1a_2 \cdots a_n$ szorzatok mind különböző maradékot adnak n-nel osztva.

HD/8. Adjuk meg az összes pozitív p egészt, melyre a $4x^2 + p$ polinom a $0, 1, \ldots, p-1$ helyeken prím értéket vesz fel.

3.3. Várkonyi Zsombor

VZs/1. Adott egy $n \times m$-es táblázat. Minden egyes kis mezőjének valamelyik átlóját behúzzuk. Bizonyítsd be, hogy valamelyik szemköztes oldalpár összeköttetésbe került ezáltal.

VZs/2. Egy síkbeli zárt töröttvonal hossza 1 egység. Igazold, hogy a töröttvonal által határolt tartomány lefedhető egy $\frac{1}{4}$ egység sugarú körrel!

VZs/3. Van egy f függvényem,amely a sík (x, y) pontjaihoz rendel valós számokat. Tudjuk róla hogy teljesül rá, hogy minden x, y, z számhármasra $f(x, y)+f(y, z)+f(z, y) = 0$. Lássuk be hogy ekkor létezik olyan g függvény, hogy minden x, y valós számra
$f(x, y) = g(x) - g(y)$.

VZs/4. 10 autó megy egy úton, ahol városi és országúti szakaszok váltják egymást. Minden autóra adott az a sebesség, amivel városon belül halad és adott az a (másik) sebesség, amivel városon kívül. Nem feltétlenül egy helyről indulnak, de egy irányba haladnak (azaz minden sebesség pozitív). Az út során el van helyezve 2020 kamera, amik megjegyzik, hogy azon a ponton, ahol a kamera van, milyen sorrendben haladtak el az autók (pl. 8,2,3,4,9,5,6,10,7,1). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy semelyik két autó sem pontosan egy kameránál előzi meg egymást. Bizonyítsuk be, hogy van két kamera, amely azonos sorrendben látta az autókat elhaladni.

VZs/5. Legyen M egy prímszámokból álló halmaz, ami rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $p_1, \ldots, p_k \in M$, akkor $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ összes prímosztója is eleme M-nek. Mutassuk meg, hogy M tartalmazza az összes prímet.

VZs/6. Egy könyvtárban vagyunk, ahol sok terem található, mindegyikben egy mécsessel. Tudjuk, hogy minden teremnek két ajtaja van és minden terembe el tudunk jutni. Amikor az egyik teremben vagyunk, az ottani mécsest meggyújthatjuk vagy eloltjuk. A termek között mindkét irányban korlátlanul mozoghatunk. A könyvtárt őrző öreg szerzetes csak akkor enged ki, ha első próbálkozásra megmondjuk neki, hogy hány teremből áll a könyvtár. Jussunk ki!

VZs/7. Tekintsünk egy irracionális számot és vizsgáljuk a tizedesvessző utáni részének k hosszú szeleteit. Lássuk be, hogy legalább $k + 1$ féle szerepel közöttük.

VZs/8. Egy $2^n \times n$-es mátrix minden eleme $+1$ vagy -1 úgy, hogy mind a 2^n sor különböző. Az elemek egy tetszőleges részét lecseréljük 0-ra.
Mutassuk meg, hogy kiválasztható néhány sor úgy, hogy minden oszlopösszeg a kiválasztott sorokat tekintve 0.

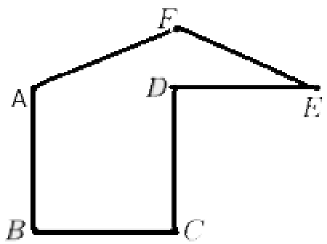
3.4. Velich Nóra

VN/1. Rudi gondolt egy pozitív egész k számot, és azt vette észre, hogy tízes számrendszerben 4^k és 5^k ugyanazzal a számjeggyel kezdődik. Bizonyítsuk be, hogy ez a jegy csak 2-es vagy 4-es lehet.

VN/2. Legyenek a és n olyan pozitív egészek, amelyekre $a^n - 1$ osztható n-nel. Bizonyítsuk be, hogy az $a+1$, a^2+2, $\ldots$, a^n+n számok mind különböző maradékot adnak n-nel osztva.

VN/3. Igazoljuk, hogy tetszőleges nemnegatív egész k esetén $\dfrac{7^{7^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}$ összetett szám.

VN/4. Vágjuk fel az ábrán látható konkáv hatszöget egy folytonos vágással két egybevágó darabra. Igazoljuk megoldásunk helyességét. (Az $ABCD$ négyzet oldala egységnyi, az AEF egyenlőszárú háromszög alapja két egység, szárszöge 135°.)



VN/5. Adott az $ABCD$ négyszög, melynek C-nél és D-nél levő szöge derékszög. Szerkesszük meg a CD szakasznak azt a P pontját, melyre $APD\sphericalangle = 2 \cdot BPC\sphericalangle$.

VN/6. Adott egy n oszlopot és k sort tartalmazó sakktábla, melynek bizonyos mezőire korongokat helyeztünk (minden mezőre legfeljebb egyet). Nevezzünk két korongot szomszédosnak, ha egy sorban vagy oszlopban vannak, és az őket összekötő szakaszon nincs további korong. Minden korongnak legfeljebb három szomszédja van. Legfeljebb hány korong van a sakktáblán?

VN/7. Egy konvex poliédernek minden lapja négyszög. Mutassuk meg, hogy a poliéder lapjait három-szögekre bonthatjuk egy-egy átló meghúzásával úgy, hogy a poliéder minden csúcsánál páros számú háromszög találkozzon.

VN/8. Xavér és Yvett felváltva mondanak **a)** valós számokat; **b)** komplex számokat. Xavér kezd, és a játék a 100. szám kimondása után ér véget. Yvett célja az, hogy a kimondott $a_1, \ldots, a_{100}$ számokból képzett összesen $\binom{100}{2}$ darab kettős szorzat $a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{99}a_{100}$ összege 0 legyen, Xavér ezt szeretné megakadályozni. Kinek van nyerő stratégiája?

4. Maci Laci és barátai

4.1. Kun Ágoston

KÁ/1. Egy nyolcszög oldalainak felezőpontjai közül hét adott. Szerkesszük meg a nyolcadikat!

KÁ/2. Tíz rabló egy többzáras ládában őrzi a kincsét. Minden rablónak bizonyos zárakhoz van kulcsa, egy zárhoz esetleg többnek is. A kulcsok úgy vannak elosztva, hogy semelyik három rabló se tudja a birtokában lévő kulcsokkal kinyitni a ládát, de bármely négy közülük már hozzá tud férni a kincshez. Legalább hány zár szükséges a fenti feltételek teljesüléséhez?

KÁ/3. Legyen $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$, ahol n pozitív egész számot jelent!
Bizonyítsd be, hogy van olyan k pozitív egész szám, amelyre a $P_k = a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k$ szorzat értéke nagyobb 1000-nél! Melyik a legkisebb ilyen k szám?

KÁ/4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 4444^{4444} szám számjegyeinek az összege, B pedig A számjegyeinek összege. Számítsuk ki B számjegyeinek az összegét.

KÁ/5. $a_1, a_2, ..., a_{3n}$ $(n \geq 1)$ természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy az $a_i - a_j$ $(1 \leq i < j \leq 3n)$ különbségek közül legfeljebb $3n^2$ olyan lehet, amely nem osztható 3-mal!

KÁ/6. Számítsuk ki $\binom{2002}{0} - \binom{2001}{1} + \binom{2000}{2} - \ldots - \binom{1001}{1001}$ értékét.

KÁ/7. Melyek azok az $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvények, amelyekre

$$f(x+y) + f(x) \cdot f(y) = f(xy) + f(x) + f(y)\ ?$$

KÁ/8. Van egy zsebrádiónk, amely két ceruzaelemmel működik A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és a rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezzünk kettő a rádióba, és ha szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szó, akkor lealább az egyik rossz. Legalább hány kísérletre van szükség ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

4.2. Nyárfádi Patrik

NyP/1. A nemnegatív x, y számokra teljesül, hogy $x^3 + y^4 \le x^2 + y^3$. Igazoljuk, hogy $x^3 + y^3 \le 2$.

NyP/2. András gondolt egy 16-nál nem nagyobb pozitív egészre. Béla feltehet 7 eldöntendő kérdést, amelyre András igennel vagy nemmel válaszolhat, és egyszer rossz választ is adhat. Segítsünk Bélának kitalálni a gondolt számot.

NyP/3. Az A, B és C betűk felhasználásával szavakat (véges hosszúságú betűsorozatokat) készítünk. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:

1. A szóban kiválasztunk néhány egymás utáni betűt – esetleg csak egyetlen egyet, vagy akár a teljes szót –, és „megduplázzuk”, például $B\underline{BCA}C \to BCABCAC$.
2. Az 1. lépés visszafelé: Ha valahol a szóban két egymás utáni részlet megegyezik, akkor az egyiket elhagyjuk: $\underline{ABCABC}BC \to ABCBC$.

Igazoljuk, hogy ilyen lépések sorozatával bármelyik szóból eljuthatunk egy legfeljebb 8-betűs szóhoz.

NyP/4. A 12.b osztályba ugyanannyi fiú jár, mint lány, így a szalagavatón mindenkinek lesz az osztályból táncpartnere. A párok összeállításához minden fiú rangsorolja az összes lányt, és fordítva. Mutassuk meg, hogy párba állíthatók úgy, hogy ne legyen olyan fiú és lány, akik mindketten szívesebben táncoltak volna egymással, mint a nekik jutó partnerrel.

NyP/5. Határozzuk meg azokat az a számokat, amelyekre az $\dfrac{a^{2000}-1}{a-1}$ kifejezés értéke négyzetszám.

NyP/6. Az ABC háromszög beírt köre az AB és AC oldalakat az X és Y pontokban érinti. A B-ből induló szögfelező az XY szakaszt P-ben metszi. Mekkora az $APB\sphericalangle$?

NyP/7. Lehet-e négy egymást követő pozitív egész szám szorzata köbszám?

NyP/8. Egy 23×23-as négyzetet felbontunk 1×1-es, 2×2-es és 3×3-as négyzetekre. Legalább hány darab 1×1-es négyzet szerepel a felbontásban?

4.3. Réti Zoltán

RZ/1. Minden pozitív egész számot piros vagy kék színűre festettünk úgy, hogy különböző színű számok összegének a színe kék, a szorzatuk színe pedig piros. Milyen színű két piros szám szorzata?

RZ/2. Adott 2002 doboz, mindegyikükben néhány kavics. Ezen kívül korlátlan számú kavics áll rendelkezésünkre. Egy lépésben bármely k dobozba betehetünk 1-1 kavicsot. Elérhető-e, hogy bizonyos számú lépés után minden egyes dobozban ugyanannyi kavics legyen, ha **a)** $k = 8$ **b)** $k = 9$?

RZ/3. A k_1 és a k_2 körök az A és a B pontokban metszik egymást, egyik közös érintőjük pedig az E_1, illetve az E_2 pontokban érinti a köröket. Bizonyítsuk be, hogy az A, E_1, E_2, illetve a B, E_1, E_2 pontokon átmenő körök sugara egyenlő.

RZ/4. Oldjuk meg a $\sin 3x + 3\cos x = 2\sin 2x(\sin x + \cos x)$ egyenletet.

RZ/5. A négyzet alakú medencében úszkáló Jerry el szeretne menekülni a parton rá leső Tom elől. Tom nem tud úszni, lassabban fut, mint Jerry, viszont négyszer olyan gyorsan fut, mint ahogy Jerry úszik. Megmenekülhet-e mindig Jerry?

RZ/6. A pozitív a, b, c számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + c \leq 3$.

RZ/7. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ egész szám, és $3^n + 4^n$ osztható n-nel, akkor n osztható 7-tel.

RZ/8. Egy 28-elemű halmazból 4-elemű részhalmazokat akarunk kiválasztani a következő tulajdonságokkal:

(a) Bármelyik két kiválasztott négyesnek legfeljebb két közös eleme legyen;

(b) Ha x egy tetszőleges elem és A egy olyan négyes, amely nem tartalmazza x-et, akkor létezzen legalább egy olyan B négyes is, amely az x-et tartalmazza, és A-val pontosan két közös eleme van.

Lehetséges-e ilyen négyeseket kiválasztani?

4.4. Rubint Gergő

RG/1. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 számjegyek mindegyikének a felhasználásával hétjegyű számokat készítenünk. Lehet-e ezek lözött két olyan, hogy egyik a másiknak osztója?

RG/2. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet lefedni a síkot egybebágó konvex n-szögekkel, ha $n > 6$.

RG/3. Tudjuk, hogy $a^5 + b^5 \leq 1$ és $x^5 + y^5 \leq 1$. Bizonyítsuk be, hogy $a^3x^2 \leq 1$.

RG/4. Adott a síkon öt pont amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesbe. Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük három, amelyek tompaszögű háromszöget alkotnak.

RG/5. Az a és b pozitív egész számok. Milyen k pozitív egészekre teljesülhet az

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = k \quad \text{egyenlet?}$$

RG/6. Az n és k 1-nél nagyobb pozitív egész számok, és $n < 2^k$.
Bizonyítsuk be, hogy mindig ki lehet választani úgy $2k$ darab n-nel nem osztható egész számot, hogy bárhogy is osztjuk szét két halmazba ezt a $2k$ számot, valamelyik halmazban lesz valahány szám, amelyek összege osztható lesz n-nel.

RG/7. Igazoljuk, hogy minden konvex négyszögnek van olyan csúcsa, amelynek a vele szomszédos két csúcs által meghatározott szakasz felezőpontjára tükrözött képe nincs a háromszögön kívül.

RG/8. Van n hordó, amik közül pontosan 1 mérgezett. A mérgezett kívülről sehogy sem különböztethető meg a többitől. Ha egy egér iszik a mérgezett hordóból pontosan 1 óra múlva meghal. Hány egér kell legalább, hogy meg tudd állapítani, hogy melyik a mérgezett hordó, ha egy órád van rá?

5. Nem létező ívek

5.1. Füredi Erik

FE/1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz-1 \quad (1)$$

$$(x-2)(y-2)(z-2) = xyz-2 \quad (2)$$

FE/2. Egy konvex testnek két háromszöglapja és három négyszöglapja van. Kössük össze az egyik háromszöglap mindegyik csúcsát a vele szemközti négyszöglap átlóinak metszéspontjaival. Bizonyítsuk be, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

FE/3. Legyen $n \geq 3$ egész és legyenek $a_2, a_3, \ldots, a_n$ olyan pozitív valós számok, amelyekre $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n > n^n.$$

FE/4. A sík 4027 pontjából álló alakzatot *kolumbiai*nak nevezzük, ha 2013 pontja pirosra, a többi 2014 kékre van színezve, és az alakzat semelyik három pontja sincs egy egyenesen. Néhány egyenese meghúzásával a síkot tartományokra bontjuk. Az egyeneseknek ezt az elrendezését a kolumbiai alakzatra nézve jónak nevezzük, ha a következő két feltétel teljesül: semelyik egyenes sem megy át az alakzat semelyik pontján sem; nincs olyan tartomány, amelyik mindkét színű pontot tartalmaz.
Határozzuk meg a legkisebb olyan k értéket, amire igaz az, hogy 4027 pontból álló bármely kolumbiai alakzatra van k egyenesből álló jó elrendezés.

FE/5. Határozzuk meg az összes olyan $n \geq 2$ egész számot, ami rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges a_1, a_2, $\ldots$, a_n egészekre, amelyek összege nem osztható n-nel, van olyan $1 \leq i \leq n$ index, amire az a_i, $a_i + a_{i+1}$, $\ldots$, $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+n-1}$ számok egyike sem osztható n-nel. ($i > n$ esetén $a_i = a_{i-n}$.)

FE/6. Tekintsünk öt olyan A, B, C, D, E pontot, amelyre $ABCD$ paralelogramma, $BCED$ pedig egy húrnégyszög. Legyen ℓ egy, az A ponton átmenő egyenes. Tegyük fel, hogy ℓ a DC szakaszt az F belső pontban metszi, a BC egyenest pedig a G pontban. Tegyük fel továbbá, hogy $EF = EG = EC$. Bizonyítsuk be, hogy ℓ a $DAB\angle$ szögfelezője.

FE/7. Tekintsünk egy $n \times n$-es négyzetalakú táblát, ahol n rögzített páros pozitív egész. A tábla n^2 egységnégyzetre van felosztva. Azt mondjuk, hogy a tábla két különböző négyzete szomszédos, ha van egy közös oldaluk. A táblán N egységnégyzet meg van jelölve olymódon, hogy minden négyzet (jelölt, vagy nem jelölt) szomszédos legalább egy jelölt négyzettel. Határozzuk meg N lehetséges legkisebb értékét.

FE/8. Adott egy $N \geq 2$ egész szám. $N(N+1)$ futballjátékos, akik között nincs két egyenlő magasságú, valahogyan felállnak egy sorban. Az edző ki akar hagyni ebből a sorból $N(N-1)$ játékost úgy, hogy a megmaradt $2N$ játékos alkotta sor játékosaira teljesüljön az alábbi N feltétel:

(1) senki nem áll a legmagasabb és a második legmagasabb játékos között,

(2) senki nem áll a harmadik legmagasabb és a negyedik legmagasabb játékos között

...

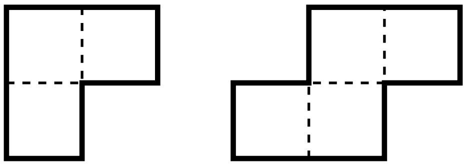
(N) senki nem áll a két legalacsonyabb játékos között.

Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megtehető.

5.2. Gyetvai Miklós

GyM/1. n tetszőleges pozitív egész. $a_0, a_1, ..., a_n$ és $0 < x < 1$ valós számokra teljesül, hogy $\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + ... + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $0 < y < 1$ valós szám, amelyre teljesül, hogy $a_0 + a_1 y + ... + a_n y^n = 0$

GyM/2. m és n 3-nál nagyobb egész számok. Vegyünk a négyzetrácson egy $(2m-1) \times (2n-1)$ méretű téglalapot, amelyeket lefedtünk az alábbi két elem felhasználásával:



A két elemből összesen minimum hányat kell felhasználni a téglalap parkettázásához?

GyM/3. S a sík pontjainak egy véges halmaza, amelyre igaz, hogy bármely háromszög, amelynek mindhárom csúcsa S-beli pont, annak a területe legfeljebb 1. Minimum mekkora területű háromszöggel tudjuk lefedni S pontjait?

GyM/4. Legyen $f_0(x) = 1, f_1(x) = x$ és $f_n(x) = \dfrac{(f_{n-1}(x))^2 - 1}{f_{n-2}(x)}$ minden 1-nél nagyobb n egészre.
Bizonyítsuk be, hogy minden természetes n-re $f_n(x)$ egy egész együtthatós polinom.

GyM/5. Nevezzünk N-*alakú*nak k-ra egy pozitív egész számot, amely kifejezhető k darab egymást követő pozitív egész összegeként. Vegyük az összes olyan számot, amely N-alakú 2017-re, de semmi más k-ra nem. Mi ezek a számok között az összegekben szereplő számok minimuma?

GyM/6. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Legyen az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény

$$f(z) = n + (n-1)z + (n-2)z^2 + \ldots + z^{n-1}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $|z| \leq 1$ akkor a függvénynek z nem gyöke (más szóval a függvénynek nincs gyöke az egységkörön belül).

GyM/7. Legyen X egy random változó, amely természetes számokat vesz fel valamilyen eséllyel. Tudjuk, hogy $E(X) = 1, E(X^2) = 2$ és $E(X^3) = 5$, ahol $E(y)$ az y várható értéke. Minimum mennyi a valószínűsége az $X = 0$ eseménynek?

GyM/8. Legyen x_n egy végtelen sorozat, amelyre $x_0 = 1$ és pozitív egész n-re $x_n = \ln(e^{x_{n-1}} - x_{n-1})$. Létezik-e $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i$, és ha igen, mennyi az értéke?

5.3. Hervay Bence

HB/1. Egy baktériumtörzs minden tagja óránként p eséllyel kettéosztódik és $1-p$ eséllyel elpusztul.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kezdetben k tagú baktériumtörzs sosem hal ki?

HB/2. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ olyan függvény, hogy

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}: f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=0.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x,y)=g(x)-g(y)$ valamilyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre.

HB/3. Legyen $a_{i+1}=a_i+\dfrac{1}{a_i}$ és $a_1>0$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

HB/4. Átlagosan hányféleképpen írhatók fel a természetes számok **a)** két **b)** három egész szám négyzetösszegeként?
(Ha S_n jelöli az első n számra vett átlagot, akkor mennyi $\lim_{n\to\infty}S_n$ értéke?)

HB/5. Tekintsünk egy négyszöget

1. a csúcsaiból álló pontnégyesnek.
2. homogén lemeznek.

Milyen négyszögek esetén esik egybe a kétféle alakzat súlypontja?

HB/6. Egy óra mutatói teljesen egyformák, így lehet, hogy néha nem egyértelmű az általuk mutatott idő (mert a mutatókat valahogy permutálva is valid állást kapunk).
Hány ilyen „többértelmű” állás van, ha az óra
a) kétmutatós (óra, perc)? **b)** hárommutatós (óra, perc, másodperc)?
(12-60-60-as óráról van szó, melynek mutatói egyenletes szögsebességgel forognak, a mutatók helyzetét végtelen pontossággal le tudjuk olvasni.)

HB/7. Konstruáljunk olyan valós függvényt, melynek minden folytonos valós függvénnyel minden intervallumon kontinuum sok közös pontja van!

HB/8. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan $n\in\mathbb{N}$ van, melyre $|\mathrm{tg}(n)|>n$.

6. Rút kiskacsák

6.1. Bán-Szabó Áron

BSzÁ/1. Bizonyítsd be, hogy ha n egy pozitív egész és p egy prím, melyekre $n \mid p-1$, illetve $p \mid n^3-1$, akkor $4p-3$ egy négyzetszám!

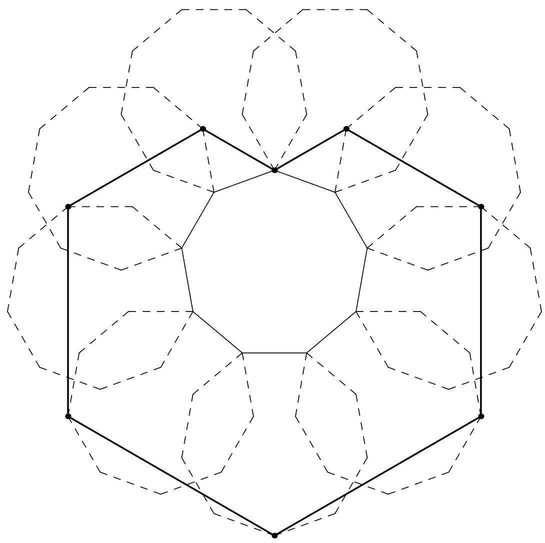
BSzÁ/2. Egy $2 \times n$-es téglalap minden mezőjébe beírjuk az $1, 2, \ldots, n$ számok valamelyikét úgy, hogy mindkét sorban csakis különböző számok szerepeljenek. Mely n-ekre lehetséges az, hogy mind az n oszlopban négyzetszám legyen a két szám összege?

BSzÁ/3. Az $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ polinom együtthatói nemnegatív számok. Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek n darab (különböző) valós gyöke van. Igazoljuk, hogy:
a) $f(x) \geq (x+1)^n$ minden nem negatív x-re; **b)** $a_k \geq \binom{n}{k}$ minden $1 \leq k \leq n-1$ egészre.

BSzÁ/4. Az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $a+b+c = abc$. Igazold, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

BSzÁ/5. Egy egységoldalú szabályos n-szög kerületén végiggörgedtünk egy másik egységoldalú szabályos n-szöget, és minden görgetés után megjelöltük az egyik (fixált) csúcsát az n-szögnek (lásd ábra). A megjelölt pontok egy másik sokszöget határoznak meg, melynek területe T. Legyen A az egységoldalú szabályos n-szög területét, míg B annak a szabályos n-szögnek a területét, amely körülírt körének sugara egységnyi. Bizonyítsd be, hogy létezik két olyan pozitív egész n_1, n_2 szám, melyekre $T = n_1 \cdot A - n_2 \cdot B$.



BSzÁ/6. Az ABC háromszögben magasságpontja H. A beírt kör a BC, CA, AB oldalakat rendre az A', B', C' pontokban érinti. A háromszög körülírt körének az A-t tartalmazó BAC ívének felezőpontja legyen M. Bizonyítsd be, hogy ha a B', C', H pontok egy egyenesen vannak, akkor az $AH, A'M$ egyenesek a háromszög körülírt körén metszik egymást.

BSzÁ/7. Egy n pontú, síkbarajzolt véges $G(V,E)$ gráfra jelölje $x(e)$ azon élek számát, melyek keresztezik az e élt. Bizonyítandó, hogy

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{x(e)+1} \leq 3n-6.$$

BSzÁ/8. Az ABC háromszög alakú billiárd asztal AB, AC oldalai egyenlő hosszúak. Az AB oldalon egy P pontban elhelyeztünk egy (pontszerű) golyót, melyet egy ütővel egyenes irányban meglöktünk. Ez először a BC oldalnak ütközött a Q pontban, majd az AC oldalnak az R pontban. Mutasd meg, hogy az ABC, APR háromszögek magasságpontjai és a Q pont egy egyenesen van.

6.2. Baski Bence

BaB/1. Tekintsük az $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekurzióval definiált Fibonacci-sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy $k < m$ esetén $\sum_{i=k}^{m} F_i F_{i+3}$ összetett szám.

BaB/2. Az a, b, c oldalú háromszög beírt körének középpontján átmenő egyenes a c oldalt P-ben, a b oldalt pedig Q-ban metszi. Legyen $AP = p$ és $AQ = q$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a+b+c}{bc}.$$

BaB/3. Igazoljuk, hogy tetszőleges nemnegatív egész k esetén $\frac{7^{7^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}$ összetett szám.

BaB/4. A sík egész koordinátájú rácspontjain egy bolha ugrál. Tud-e úgy ugrálni, hogy minden rácspontban pontosan egyszer járjon, az ugrásainak a hossza pozitív egész szám legyen és minden pozitív egész pontosan egyszer forduljon elő az ugrások hosszai között?

BaB/5. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számhoz található olyan n^2-nél nem nagyobb, n-nel osztható pozitív egész szám, amelynek 10-es számrendszerbeli alakjában nem szerepel mind a tíz számjegy.

BaB/6. 2016 rabló együtt elrabolt egy nagy kincsesládát és el akarják ásni. Mivel nem bíznak egymásban, ezért úgy döntenek, hogy szerelnek rá lakatokat és a lakatokhoz való kulcsokat szétosztják egymás között. (Egy lakathoz több kulcs is tartozhat, de egy kulcs csak egy lakatot nyit). Úgy szeretnék ezt megtenni, hogy bármely 1010 közülük ki tudja nyitni a kincset, de semelyik 2 nem tudja ezt megtenni. Legalább hány lakatra van szükségük?

BaB/7. Határozd meg a

$$\mid 2^m - 181^n \mid$$

kifejezés lehető legkisebb értékét, ahol m és n pozitív egész számok.

BaB/8. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek magasságpontja H, továbbá a T_A, T_B, T_C pontok az A, B, C pontokból induló magasságvonalak talppontjai. Legyen P pont a $T_A T_C$ egyenes metszéspontja a B-ből induló magasságvonallal, míg Q pont legyen az AB egyenes metszéspontja a P-n átmenő BC-re merőleges egyenessel. Igazoljuk, hogy ha $T_B Q$ és AT_A metszéspontja N, akkor N felezi az AH szakaszt!

6.3. Bencsik Ádám

BÁ/1. Vegyünk kettő tetszőleges 1-nél kisebb pozitív x, y számot. Tegyük fel hogy ez a 3 szám meghatároz egy háromszöget. Mekkora az esélye hogy a háromszög tompaszögű?

BÁ/2. Legyen ABC hegyesszögű háromszög körülírható köre k. A háromszög magasságai legyenek AD, BE, CF. Tükrözve k kört AB-re kapom y kört. EF egyenes P-ben metszi k kört és DF egyenes Q-ban y kört. Bizonyítsuk be, hogy B, P, Q egy egyenesre esnek.

BÁ/3. $ABCD$ trapézban $CDA\sphericalangle = 90° = DAB\sphericalangle$. Legyen M és N az AC és BD átlók felezőpontjai ilyen sorrendben. BC egyenes (ABN) és (CDM) köröket Q-ban és R-ben metszi. Ha K középpontja MN-nek, akkor lássuk be, hogy $KQ = KR$.

BÁ/4. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c, d > 0$ és $a <= 1$, $a + b <= 5$, $a + b + c <= 10$ és $a + b + c + d <= 30$, akkor

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10.$$

BÁ/5. Egy matekversenyen 21 fiú és 21 lány szerepelt. Mint kiderült senki sem oldott meg 6-nál több feladatot és minden fiú-lány oldott meg azonos feladatot. Lássuk be, hogy van olyan feladat amit megoldott legalább 3 fiú és 3 lány.

BÁ/6. Ha kivesszük egy 2×2-es négyzet egyik négyzetét, a kapott alakzatot hívjuk L-alaknak. Lefedtünk egy 5×7-es téglalapot ilyen L-alakokkal, hogy minden L-alak a téglalapon belül helyezkedik el, nem marad ki üres mező. (Két L-alak megengedett hogy rálógjon egymásra). Lefedhető- úgy a 3×5-ös téglalap hogy minden mezőt ugyanannyi L-alak fedjen le?

BÁ/7. A koordináta rendszer $(0; 0)$ rácspontjában van egy pont. Egy lépésben egy $(m; n)$ pontot, amennyiben $(m + 1; n)$ és$(m; n + 1)$ rácspont üres, ketté tudunk osztani. Ekkor $(m; n)$ pont eltűnik, és megjelenik egy-egy pont $(m+1; n)$ és $(m; n+1)$-ben. Meg lehet-e oldani véges sok lépéssel, hogy kiürítsük az első k db átlót, ahol k tetszőlegesen nagy pozitív egész szám.

BÁ/8. Legyen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$. Lássuk be, hogy 2^k akkor és csak akkor osztja a_n-et, ha n-et is osztja.

6.4. Terjék András

TA/1. Egy egységnégyzet belsejébe egy konvex, n csúcsú sokszöget írunk. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható az n csúcsú sokszögnek 3 csúcsa úgy, hogy azok által meghatározott háromszög területe kisebb mint $\frac{80}{n^3}$ egység.

TA/2. Alfréd, a robot, egy gomb megnyomására kiad egy egész számot véletlenszerűen 1 és n között.
Várhatóan hányszor kell megnyomnunk Alfrédot, hogy 1 és n között az összes számot kiadja?

TA/3. $p(x)$ és $q(x)$ valós együtthatós polinomok, bármilyen valós x-re $p(x) \neq q(x)$. Továbbá bármilyen x-re $p(q(x)) = q(p(x))$. Bizonyítsd, hogy bármilyen valós x-re $p(p(x)) \neq q(q(x))$.

TA/4. Egy $3 \times 3 \times 3$-as kockarács egyik sarokkockájába rakunk egy egeret, a közepébe egy sajtot. Minden lépésben az egér véletlenszerűen átlép egy szomszédos kockába. Várhatóan hány lépésen belül találja meg a sajtot?

TA/5. Bizonyítsd, hogy tetszőleges ponthalmaz (véges sok pont, semelyik 3 nem esik egy egyenesre) bármilyen háromszögelésében ugyanannyi a háromszögek száma.

TA/6. Adott ABC háromszög. Ennek egy belső P pontjának legyen BC, CA, AB oldalakra vet vetülete A_1, B_1, C_1. Legyen $b(ABC)$ az ABC háromszög beírt körének sugara. Hol vannak azok a P pontok, amelyekre

$$b(PAC_1) + b(PBA_1) + b(PCB_1) = b(PC_1B) + b(PA_1C) + b(PB_1A)$$

TA/7. Balázs gondolt n db egész számra, majd a gondolt számok összes részhalmazában a tagok összegét felírta egy lapra. Ki lehet-e találni az így keletkezett 2^n db számból a gondolt számokat?

TA/8. Adott $\frac{3^k-3}{2}$ látszólag egyforma érme, ezekből egy hamis (könyebb vagy nehezebb a többinél). Bizonyítsd, hogy k db előre megadott méréssel megtalálható a hamis érme, és eldönthető, hogy könyebb vagy nehezebb a többinél.

7. Százszorszép herceg

7.1. Fleiner Zsigmond

FZs/1. Egy 3×3-as tábla 4 sarkában 2 fehér és 2 fekete huszár áll úgy, hogy a szemben lévő sarkokban ugyan olyan a huszárok színe. Elképzelhető-e, hogy néhány lépés után megint a sarkokban álljanak a huszárok, viszont a szemben lévők ellentétes színűek legyenek.

FZs/2. Egy $n \times n$-es táblára felírjuk az első n^2 természetes számot. Bizonyítsuk, hogy lesz két szomszédos, melyek különbsége legalább n.

FZs/3. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Legyen AM az A-ból induló magasság. Vegyünk AM szakaszon egy P pontot. BP és AC egyenesek metszéspontja D. Hasonló módon CP és AB metszéspontja legyen E. Bizonyítsuk, hogy $DME\angle$ szögfelezője AM.

FZs/4. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 0$ egész szám előállítható a következő alakban:

$$n = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots a_k \cdot k^2,$$

ahol az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok mindegyike $+1$ vagy -1 és k alkalmas egész szám.

FZs/5. Tegyünk egy kavicsot a $(0,0)$ koordinátájú pontra. Ez után egy lépésben levehetünk egy kavicsot a tábláról, ha a felette és mellette lévő rácspontokon nincs kavics, majd ezekre kavicsot rakunk (tehát egy lépésben 1 kaviccsal lesz több a síkon). Határozzuk meg a lehető legkisebb lépésszámot, amivel olyan állapotot érhetünk el, hogy az alsó hat rácsponton ne legyen kavics.
(*alsó hat rácspont:* $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)$)

FZs/6. Bizonyítsuk be, hogy egy egyértelműen három-színezhető gráfnak legalább $2n-3$ éle van.

FZs/7. Legyen $1 \leq r \leq n$, és tekintsük az $1, 2, \ldots n$ halmaz összes r-elemű részhalmazát! Vegyük e részhalmazának mindegyikéből a legkisebb elemet, és jelölje $F(n,r)$ ezeknek az elemeknek a számtani közepét! Bizonyítsuk be, hogy $F(n,r) = \dfrac{n+1}{r+1}$.

FZs/8. Bizonyítsuk be, hogy egy konvex n szögben legfeljebb n átlót tudunk egyszerre kiválasztani úgy, hogy páronként az átlók a sokszögön belül messék egymást.

7.2. Kovács Tamás

KT/1. Egy $n \times n$ méretű tábla n^2 mezejének mindegyikét feketére vagy fehérre színezzük. Jelölje a_i a fehér mezők számát az i-edik sorban, és jelölje b_i a fekete mezők számát az i-edik oszlopban. Határozzuk meg $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ maximális értékét a tábla összes kiszínezésére nézve.

KT/2. Tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_n$ és $y_1, \ldots, y_n$ olyan nemnegatív számokból álló monoton növő sorozatok, amelyekre az n tag összege 1.
a) Legfeljebb mekkora lehet $\min_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$? **b)** Legfeljebb mekkora lehet $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$?

KT/3. Sir Bedevir csak akkor indul el egy lovagi tornán, ha tudja, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel győzni fog. Bármely összecsapás esetén az ellenfelek győzelmének valószínűsége a harcképességükkel arányos. Bedevir harcképessége 1, n-edik ellenfelének a harcképessége pedig $\frac{1}{2^{n+1}-1}$. Hány lovag jelentkezhetett a tornára, ha Bedevir gondos számolás után úgy döntött, hogy ő is elindul?

KT/4. Legyenek a síkon $e_1, e_2, \ldots, e_n$ különböző egyenesek, f pedig egy olyan egyenes, mely egyikükkel sem párhuzamos. Tekintsük az f-fel párhuzamos összes f_α egyenest. Legyen S_α az $f_\alpha \cap e_1, f_\alpha \cap e_2, ..., f_\alpha \cap e_n$ pontok súlypontja. Mutassuk meg, hogy az S_α pontok kollineárisak.

KT/5. Az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsából induló belső szögfelező a BC oldalt az L pontban, a háromszög köré írt kört másodszor az N pontban metszi. L-ből az AB egyenesre emelt merőleges talppontja K, az AC egyenesre emelt merőlegesé pedig M. Bizonyítsuk be, hogy az $AKNM$ négyszög és az ABC háromszög területe egyenlő.

KT/6. Adott a síkon véges sok rácspont. Ki lehet-e mindig színezni a rácspontokat fehérre és feketére úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban is legfeljebb kettő fekete rácspont legyen, és minden fehér rácspont két fekete között legyen, azaz vagy alatta és fölötte is, vagy tőle balra és jobbra is legyen fekete színű rácspont?

KT/7. Az olimpián 49 ember indult. 3 feladat volt, minden feladatra $0-7$ pontot lehet kapni. Bizonyísd be, hogy van két ember úgy, hogy az egyik minden feladatra legalább annyit kapott mint a másik.

KT/8. Bizonyísd be, hogy ha adott 9 rácspont a térben, akkor van köztük kettő, melyek szakaszán van rácspont.

7.3. Szabó Kornél

SzK/1. Adott a síkon n általános helyzetű pont. Igazoljuk, hogy az általuk alkotott egységnyi területű háromszögek száma nem több, mint $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

SzK/2. Egy barátoddal a következő játékot játsszátok:
A barátod gondol egy n csúcsú gráfra, csúcsait megszámozza 1-től n-ig, majd megmondja n-t. Innentől minden kérdésedben rákérdezhetsz arra, hogy két különböző csúcs között be van-e húzva egy él.
Legkevesebb hány kérdésből tudod megmondani, hogy a gráf összefüggő-e?

SzK/3. Legyen f a pozitív valós számokon értelmezett, valós értékű függvény, amelyre minden pozitív valós x, y esetén $f(xy) \leq xf(y)$.
Igazoljuk, hogy minden pozitív valós x, y-ra $f(xy) = xf(y)$.

SzK/4. Az igazgatóság a jövő évi fakultációkat tervezi az iskola n tanulója számára. Minden fakultáció legalább két tanulóval indul, és az iskola intézkedési terve előírja, hogy a legalább két közös tanulóval rendelkező csoportok tanulóinak száma eltérjen. Igazoljuk, hogy a fakultációk maximális száma nem nagyobb, mint $(n-1)^2$.

SzK/5. Két játékos előtt egy-egy kavicskupac található, kezdetben mindkettőben k kavics van. Először az első játékos ezekhez hozzátesz összesen 2008 újabb kavicsot, az új kavicsokat tetszőlegesen oszthatja el a két kupac között (akár az összeset is az egyik kupacba teheti). Ezután a második játékos tesz hozzá a kupacokhoz összesen 2008 újabb kavicsot, és ugyanígy folytatják felváltva. Az nyer, akinek a kupacában (a saját vagy ellenfele lépése után) a kavicsok száma négyzetszám, míg ellenfele kupacára ez nem igaz (ha mindkét kupac ilyen, akkor a játékot folytatják). Van-e végtelen sok k-ra a második játékosnak nyerő stratégiája?

SzK/6. Igazoljuk, hogy minden n csúcsú, m élű gráfnak van legalább $\frac{m}{2}$ méretű páros részgráfja.

SzK/7. Igazoljuk, hogy minden n-re létezik egy n csúcsú tournament gráf legalább $n! \cdot 2^{-n+1}$ darab Hamilton-körrel.

SzK/8. Létezik-e olyan pozitív valós (a, b, c) hármas, amire $abc = 1$, és

$$\sqrt{\frac{a^3}{1+bc}} + \sqrt{\frac{b^3}{1+ac}} + \sqrt{\frac{c^3}{1+ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

SzK/9. Legyenek $a_1, ..., a_n$ és $b_1, ..., b_n$ páronként diszjunkt valós számok. Egy $n \times n$-es táblázat i. sorának j. oszlopába az $a_i + b_j$ számot írjuk.
Igazoljuk, hogy ha a táblázat elemeinek soronkénti szorzatai páronként megegyeznek, akkor az oszloponkéntiek is.