Trigonometriai módszerek algebrai és geometriai feladatokban

1, Oldjuk meg az egyenletet.

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$$

Megoldás: A négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám, tehát csak $-1 \leq x \leq 1$. Innen már adódhat az ötlet, hogy valamilyen szögfüggvényértékkel helyettesítsük az x ismeretlent. Célszerű az $x = cos\omega$ helyettesítés, de ahhoz, hogy az x minden lehetséges értéket felvegyen megfelelő és elegendő $0 \leq \omega \leq \pi$. Ekkor minden x értéknek pontosan egy ω felel meg és viszont. Addíciós tétel és a négyzetes összefüggés felhasználásával az egyenlet

$$|sin\omega| = cos3\omega$$

alakban írható. Itt $0 \leq \omega \leq \pi$ miatt $sin\omega \geq 0$, az abszolút érték el is hagyható.

$$sin\omega = cos3\omega.$$

Írjuk át sinusos szögfüggvényértéket pótszögének cosinusává, majd vegyük azt a két esetet, amelyben két szög cosinusa egyenlő lehet.

$$cos\Big(\frac{\pi}{2} - \omega\Big) = cos3\omega.$$

I.) $3\omega - \frac{\pi}{2} + \omega = 2k\pi$, vagyis $\omega = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$. Ezek közül a szögek közül a megfelelő tartományba csak kettő esik: $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ és $\omega_2 = \frac{5\pi}{8}$.
II.) $3\omega + \frac{\pi}{2} - \omega = 2\omega + \frac{\pi}{2} = 2k\pi$. Ebből kapjuk, hogy $\omega = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Ezek közül a megoldások közül csak az $\omega_3 = \frac{3\pi}{4}$ esik a $0 \leq \omega \leq \pi$ intervallumba.

Az egyenlet megoldásai tehát

$$x_1 = cos\frac{\pi}{8},\ x_2 = cos\frac{5\pi}{8},\ x_3 = cos\frac{3\pi}{4}.$$

Ezek az értékek a félszögre vonatkozó addíciós tétel, továbbá nevezetes szögfüggvényértékek segítségével pontosan fel is írhatók:

$$x_1 = cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + cos\frac{\pi}{4}\Big)} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_2 = cos\frac{5\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + cos\frac{5\pi}{4}\Big)} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$x_3 = cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A feladatra (különösen a későbbi gyökök ismeretében) algebrai megoldás is adható. Ennek érdekében a szükséges kikötéseket követően emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. Az is igen érdekes kérdés, hogy mennyi energiát érdemes fordítani az értelmezési tartomány pontos megadására, hiszen a négyzetre emelés úgysem lesz ekvivalens átalakítás, a gyökök mindegyikét ellenőrízni szükséges. Természetes feltétel, hogy $-1 \leq x \leq 1$. Ezután, ha $x < 0$, akkor $4x^2 - 3 < 0$, azaz $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ha $x > 0$, akkor pedig $4x^2 - 3 > 0$, vagyis $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$1 - x^2 = x^2(16x^4 - 24x^2 + 9).$$

Harmadfokúra visszavezethető hatodfokú egyenlet. $u := x^2$. Ezzel

$$1 - u = 16u^3 - 24u^2 + 9u,$$

$$16u^3 - 24u^2 + 10u - 1 = 0.$$

Az előző megoldásból tudjuk, hogy ennek $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, illetve $u = \frac{1}{2}$ biztosan gyöke. Az egyenletből tehát a $(2u - 1)$ gyöktényező kiemelhető.

$$(2u - 1)(8u^2 - 8u + 1) = 0.$$

Ezt az egyenletet megoldva az u lehetséges értékei

$$u = \frac{1}{2},\ u = \frac{2+\sqrt{2}}{4},\ u = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Innen gyökvonás és a hamis gyökök kiszűrése után az első megoldásban kapott három x érték adódik.

Már az első feladat megoldásból is látható, hogy magasabb fokú és gyökös kifejezéseket is tartalmazó egyenletek esetében érdemes a trigonometrikus helyettesítésre is gondolnunk.

2, *Oldjuk meg az egyenletet.*

$$x + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$$

Megoldás: Ebben az esetben is feltétel, hogy $-1 \leq x \leq 1$, ezért tekinthetjük, hogy $x = cos\varphi$, ahol $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$cos\varphi + \sqrt{1 - sin^2\varphi} = \sqrt{2}(2cos^2\varphi - 1).$$

A $0 \leq \varphi \leq \pi$ feltétel miatt $sin\varphi \geq 0$, így a kétszeres szög szögfüggvényére vonatkozó azonosságot is felhasználva az egyenlet

$$cos\varphi + sin\varphi = \sqrt{2}cos2\varphi.$$

Most $\sqrt{2}$-vel osztva segédszög bevezetésével

$$\frac{1}{\sqrt{2}}cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}sin\varphi = cos2\varphi,$$

$$cos\Big(\varphi - \frac{\pi}{4}\Big) = cos2\varphi.$$

Ebből már azonnal adódnak a megoldások

$$2\varphi - \varphi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi,\ 2\varphi + \varphi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi.$$

Az elsőből nem kapunk megoldást, mert a $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ értékek közül egyik sem esik a $[0, \pi]$ intervallumba. A második egyenletből

$$\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Ezek közül kettő esik a $[0, \pi]$ intervallumba:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{12},\ \varphi_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}.$$

Az egyenlet két megoldása:

$$x_1 cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},\ x_2 = cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Itt egy tisztán algebrai megoldás, a többszöri négyzetre emelés után rendezés, szorzattá alakítás, már elég reménytelennek látszik.

3, *Hány megoldása van a* $[0, 1]$ *intervallumban a következő egyenletnek?*

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

Megoldás: Ismét alkalmazható az $x = cos\varphi$ helyettesítés, de most azzal a kényelmes feltétellel, hogy $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$8cos\varphi(2cos^2\varphi - 1)(8cos^4\varphi - 8cos^2\varphi + 1) = 1.$$

Addíciós tételekkel az egyenlet átírható

$$8cos\varphi \cdot cos2\varphi \cdot cos4\varphi = 1.$$

Látjuk, hogy $cos\varphi = 1$ megoldása az egyenletnek. A továbbiakban feltehetjük, hogy $cos\varphi \neq 1, \varphi \neq 0$, azaz $sin\varphi \neq 0$. Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $sin\varphi$-vel. A sinus kétszeres szögfüggvényértékére vonatkozó azonosság többszöri alkalmazásával így:

$$8sin\varphi \cdot cos\varphi \cdot cos2\varphi \cdot cos4\varphi = sin\varphi,$$

$$4sin2\varphi \cdot cos2\varphi \cdot cos4\varphi = sin\varphi,$$

$$2sin4\varphi \cdot cos4\varphi = sin\varphi,$$

$$sin8\varphi = sin\varphi.$$

A lehetséges megoldásokat két egyenletre bontva látjuk

$$7\varphi = 2k\pi, \text{illetve} 9\varphi = \pi + 2k\pi.$$

Ezek közül csak három esik a $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumba: $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{2\pi}{7}\right\}$. A $\varphi = 0$-val együtt összesen négy megoldást kaptunk:

$$x \in \left\{1, cos\frac{\pi}{9}, cos\frac{\pi}{3}, cos\frac{2\pi}{7}\right\}.$$

4, *Oldjuk meg az egyenletet.*

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Megoldás: Az $x = 0$ láthatóan nem megoldása az egyenletnek. A könnyeb becslés érdekében ezért egy kicsit átrendezzük az egyenlet alakját.

$$4x^3 = \frac{1}{2x} + 3.$$

Ebben a formában már észrevehető, hogy $x < -1$ vagy $x > 1$ esetén a baloldal nagyobb, mint 4, a jobboldal pedig kisebb, mint $3,5$. Tehát $-1 \leq x \leq 1$, alkalmazhatjuk az $x = cos\varphi$ helyettesítést, ahol $0 \leq \varphi \leq \pi$. Ezután térjünk vissza az egyenlet eredeti formájára és keressünk olyan addíciós formulát, amely kisebb alakítással egyszerűsíti az egyenletet.

$$8cos^3\varphi - 6cos\varphi - 1 = 0,$$

$$4cos^3\varphi - 3cos\varphi = \frac{1}{2},$$
$$cos3\varphi = \frac{1}{2}.$$

Ez az egyenlet már kényelmesen kezelhető.

$$3\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ és } 3\varphi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

megoldásai közül kell azokat megadnunk, amelyek a kiindulási feltételnek megfelelnek. Ezek a következők: $\varphi_1 = \frac{\pi}{9}, \varphi_2 = \frac{7\pi}{9}, \varphi_3 = \frac{5\pi}{9}$. Az egyenlet megoldásai ennek megfelelően

$$x_1 = cos\frac{\pi}{9}, x_2 = cos\frac{5\pi}{9}, x_3 = cos\frac{7\pi}{9}.$$

5, *Oldjuk meg az egyenletet.*

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Megoldás: Az x most tetszőleges értéket felvehet, ezért alkalmazzuk az $x = tg\alpha$ helyettesítést, ahol $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. A szög az első vagy a negyedik síknegyedbe esik, így cosinusa biztosan pozitív. Ennek megfelelően

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{tg^2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + 1} = \sqrt{\frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{1}{cos\alpha}.$$

Az eddigiek alapján egyenletünk

$$\frac{1}{cos\alpha} - tg\alpha = \frac{5}{2}cos\alpha.$$

Beszorzás után $sin\alpha$-ra kapunk másodfokú egyenletet:

$$1 - sin\alpha = \frac{5}{2}cos^2\alpha = \frac{5}{2}(1 - sin^2\alpha),$$
$$\frac{5}{2}sin^2\alpha - sin\alpha - \frac{3}{2} = 0,$$
$$5sin^2\alpha - 2sin\alpha - 3 = 0.$$

Ennek megoldásai $sin\alpha = 1$ és $sin\alpha = -\frac{3}{5}$. A kezdeti $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ feltétel miatt azonban csak $sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Ebből már $cos\alpha$, majd $tg\alpha$ ois számolható.

$$sin\alpha = -\frac{3}{5}, cos\alpha = \frac{4}{5}, tg\alpha = -\frac{3}{4}.$$

Az egyenlet egyetlen valós megoldása $x = -\frac{3}{4}$.

6, *Oldjuk meg az egyenletet.*

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$$

Megoldás: Látható, hogy $x > 0$ és $x^2 > 1$ feltételek alapján $x > 1$. Olyan helyettesítésre lenne szükség, amelyben kihasználható, hogy garantáltan egynél nagyobb értékeket kapunk, továbbá a négyzetgyök alatti mennyiség is kezelhetőbb lesz. Ezek miatt próbálkozunk az $x = \frac{1}{sin\beta}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel. Az egyenlet a következőképpen alakul

$$\frac{1}{sin\beta} + \frac{\frac{1}{sin\beta}}{\sqrt{\frac{1}{sin^2\beta} - 1}} = \frac{35}{12},$$

$$\frac{1}{sin\beta} + \frac{1}{cos\beta} = \frac{35}{12}.$$

Beszorzás után pedig

$$12(sin\beta + cos\beta) = 35 sin\beta cos\beta.$$

Legyen most $z = sin\beta + cos\beta$ és használjuk fel a négyzetes összefüggést is. Ez alapján $sin\beta cos\beta = \frac{z^2-1}{2}$. Írjuk be ezeket a kifejezéseket az egyenletbe:

$$12z = 35\frac{z^2 - 1}{2},$$

$$35z^2 - 24z - 35 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai $z_1 = \frac{7}{5}$ és $z_2 = -\frac{5}{7}$. Ez utóbbi biztosan nem megoldás, hiszen a β az első síknegyedbe esik, a két szögfüggvényérték és az összegük is nyilvánvalóan csak pozitív lehet. Már csak a

$$sin\beta + cos\beta = \frac{7}{5}$$

egyenlet megoldása van hátra. Ezt az egyenletbe helyettesítve

$$sin\beta cos\beta = \frac{12}{25}.$$

Tehát $sin\beta$ és $cos\beta$ egy olyan másodfokú egyenlet gyökei, amelyben a gyökök összege $\frac{7}{5}$, a gyökök szorzata pedig $\frac{12}{25}$.

$$u^2 - \frac{7}{5}u + \frac{12}{25} = 0$$

egyenlet gyökei $u_1 = \frac{3}{5}$, $u_2 = \frac{4}{5}$. Az eredeti egyenlet megoldásai tehát

$$x_1 = \frac{5}{3} \text{ és } x_2 = \frac{5}{4}.$$

Ezek a gyökök valóban megoldásai is a kiindulási gyökös egyenletnek. Hamis gyök azért keletkezhetett és az ellenőrzést is azért kell külön hangsúlyoznunk, mert a szorzatra vonatkozó $\frac{z^2-1}{2}$ kifejezése már nem volt ekvivalens átalakítás.

7, *Oldjuk meg az egyenletet.*

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$$

Megoldás: Az egyenletben szereplő belső négyzetgyökös kifejezés arra utal, hogy ismét célszerű a sinusos, vagy cosinusos helyettesítés. A két eset közül a későbbi addíciós lehetőség miatt az $x = cos\beta$, $0 \leq \beta \leq \pi$ választása célszerűbb. A négyzetes összefüggés, majd a kétszeres szögekre vonatkozó addíciós tételek segítségével

$$\sqrt{\frac{1+2cos\beta sin\beta}{2}} = 1 - 2cos^2\beta,$$

$$\sqrt{\frac{1+sin2\beta}{2}} = -cos2\beta.$$

Látjuk, hogy feltétel $cos2\beta \leq 0$. Emeljük négyzetre az egyenletet.

$$\frac{1+sin2\beta}{2} = cos^2 2\beta,$$

$$1 + sin2\beta = 2 - 2sin^2 2\beta.$$

Ez másodfokú egyenlet $u = sin2\beta$ -ra.

$$2u^2 + u - 1 = 0,$$

gyökei $u_1 = -1$, továbbá $u_2 = \frac{1}{2}$. A $sin2\beta = -1$ és $sin2\beta = \frac{1}{2}$ egyenleteket kell megoldani figyelembe véve a $0 \leq \beta \leq \pi$ és $cos2\beta \leq 0$ feltételeket is. Az elsőből $\beta = \frac{3\pi}{4}$, a másodikból $\beta = \frac{5\pi}{12}$ adódik. A kiindulási egyenlet megoldásai

$$x_1 = cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{és } x_2 = cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

8, *Oldjuk meg az egyenletet.*

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$$

Megoldás: Azonnal látjuk, hogy $x \geq -2$. Vizsgáljuk meg a második gyök alatti mennyiséget is:

$$2-\sqrt{2+x} \geq 0,$$

$$4 \geq 2+x,$$

$$x \leq 2.$$

Tehát $-2 \leq x \leq 2$. Innen adódik az ötlet, hogy $x = 2cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ helyettesítést alkalmazzunk. Az egyenlet jobboldala egy négyzetgyökös kifejezéssel egyenlő, így az is teljesül, hogy $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Addíciós tételből $1 + cos\varphi = 2cos^2\frac{\varphi}{2}$. Ezeket felhasználva

$$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+2cos\varphi}}}=2cos\varphi,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-2\left|cos\frac{\varphi}{2}\right|}}=2cos\varphi.$$

A φ választása miatt $cos\frac{\varphi}{2} \geq 0$, ezért az abszolút értékjel elhagyható, az egyenlet négyzetre emelés és a kétszeres szögekre vonatkozó addíciós tételek újabb alkalmazásával még egyszerűbb alakra hozható.

$$\sqrt{2-2cos\frac{\varphi}{2}}=4cos^2\varphi-2,$$

$$\sqrt{4sin^2\frac{\varphi}{2}}=2(cos^2\varphi-1),$$

$$sin\frac{\varphi}{4}=cos2\varphi,$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{4}\right)=cos2\varphi.$$

Innen már kapjuk a megoldásokat:

$$2\varphi-\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{4}=2k\pi,\ \text{illetve}\ 2\varphi+\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{4}=2n\pi.$$

Az elsőből $\varphi = \frac{2\pi}{9} + \frac{8k\pi}{9}$, a másodikból $\varphi = -\frac{2\pi}{7} + \frac{8n\pi}{7}$. A szögek közül csak egy esik az első síknegyedbe, tehát

$$x = 2cos\frac{2\pi}{9}.$$

9, *Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$\begin{cases} 4xy(2x^2-1)=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Megoldás: Az $x^2+y^2=1$ egyenlet kínálja az $x = cos\varphi, y = sin\varphi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ helyettesítést. A szögfüggvények beírása és az addíciós tételek alkalmazása után:

$$4cos\varphi sin\varphi(2cos^2\varphi - 1) = 1,$$

$$2sin2\varphi cos2\varphi = 1,$$

$$sin4\varphi = 1.$$

Ebből a φ értékeire

$$\varphi = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

A $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ intervallumba eső szögek pedig

$$-\frac{7\pi}{8},\ -\frac{3\pi}{8},\ \frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}$$

lesznek. Az egyenletrendszer megoldásai tehát:

$$x_1 = cos\frac{7\pi}{8}, y_1 = -sin\frac{7\pi}{8},$$

$$x_2 = cos\frac{3\pi}{8}, y_2 = -sin\frac{3\pi}{8},$$

$$x_3 = cos\frac{\pi}{8}, y_3 = sin\frac{\pi}{8},$$

$$x_4 = cos\frac{5\pi}{8}, y_4 = sin\frac{5\pi}{8}.$$

10, *Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$\begin{cases} 4xy(x^2-y^2)=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Megoldás: Az előző feladat szerinti helyettesítéssel $x = cos\alpha, y = sin\alpha$, $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Ismét addíciós tételeket alkalmazhatunk a kétszeres szögekre és ezek után kapjuk, hogy

$$sin4\alpha = -1.$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

Az α lehetséges értékei a feltételek figyelembevételével

$$-\frac{5\pi}{8}, \ -\frac{\pi}{8}, \ \frac{3\pi}{8}, \ \frac{7\pi}{8}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai az eddigiek szerint:

$$x_1 = cos\frac{5\pi}{8}, y_1 = -sin\frac{5\pi}{8},$$

$$x_2 = cos\frac{\pi}{8}, y_2 = -sin\frac{\pi}{8},$$

$$x_3 = cos\frac{3\pi}{8}, y_3 = sin\frac{3\pi}{8},$$

$$x_4 = cos\frac{7\pi}{8}, y_4 = sin\frac{7\pi}{8}.$$

11, *Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$\begin{cases} x + \sqrt{1-y^2} = 1 \\ y + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Megoldás:A gyökös kifejezések mindegyike legfeljebb 1, így x és y is nemnegatív számok, amelyek nem lehetnek 1-nél nagyobbak. Helyettesíthetünk tehát $x = cos\varphi$ és $y = cos\psi$ szögfüggvényeket, ahol $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, továbbá $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Ennek megfelelően

$$\sqrt{1-x^2} = sin\varphi \text{ és } \sqrt{1-y^2} = sin\psi.$$

Az egyenletrendszer:

$$cos\varphi + sin\psi = 1$$

$$cos\psi + sin\varphi = \sqrt{3}.$$

Fejezzük ki $sin\varphi$-t és $cos\varphi$-t a két egyenletből és vegyük a négyzetösszegüket.

$$1 = sin^2\varphi + cos^{2\varphi} = (\sqrt{3} - cos\psi)^2 + (1 - sin\psi)^2.$$

A jobboldalt kifejtve az egyszerűsítések után

$$1 = 1 - 2sin\psi + sin^2\psi + 3 - 2\sqrt{3}cos\psi + cos^2\psi,$$

$$2sin\psi + 2\sqrt{3}cos\psi = 4,$$

$$\frac{1}{2}sin\psi + \frac{\sqrt{3}}{2}cos\psi = 1.$$

$$sin\left(\psi + \frac{\pi}{3}\right) = 1,$$

$$\psi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

A kapott szögek közül csak egy esik az első síknegyedbe:

$$\psi = \frac{\pi}{6},\ cos\varphi = \frac{1}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

12, *Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

Megoldás: Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy egyik ismeretlen sem lehet ± 1. Ezután mindegyik egyenletből fejezzük ki az első fokon szereplő ismeretlent. A következőt kapjuk:

$$y = \frac{2x}{1 - x^2}$$

$$z = \frac{2y}{1 - y^2}$$

$$x = \frac{2z}{1 - z^2}.$$

Legyen $x = tg\delta$, ahol $-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}, \delta \neq \pm\frac{\pi}{4}$. Ezzel a helyettesítéssel, felhasználva a kétszeres szög tangensére vonatkozó addíciós összefüggést

$$y = tg2\delta,\ z = tg4\delta,\ \text{és végül}\ \ tg\delta = x = tg8\delta.$$

Oldjuk meg a $tg\delta = tg8\delta$ egyenletet.

$$8\delta - \delta = k\pi,$$

$$\delta = \frac{k\pi}{7}.$$

$$x = tg\frac{k\pi}{7},\ y = tg\frac{2k\pi}{7},\ z = tg\frac{4k\pi}{7},\ k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

13, *Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^3y - xy^3 = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Megoldás: Az első egyenletet 4-gyel osztva az ismert négyzetes összefüggést kapjuk.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Ennek megfeleleőn alakítjuk át a második egyenletet is.

$$4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az eddigiek alapján érdemes $\frac{x}{2} = cos\varphi$, $\frac{y}{2} = sin\varphi$ helyettesítést alkalmaznunk, ahol $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Ezzel a helyettesítéssel a második egyenlet

$$4cos\varphi \cdot sin\varphi(cos^2\varphi - sin^2\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ text\text{vagyis}$$

$$sin4\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Innen már adódnak a megoldások:

$$4\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ 4\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{pontosabban}$$

$$\varphi \in \left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}, \frac{4\pi}{6}\right\}.$$

Az x és y megoldások az ezekhez tartozó $2cos\varphi$ és $2sin\varphi$ értékek.

14, *Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.*

$$\begin{cases} x = \frac{(y+1)^2}{y^2+1} \\ y = \frac{2z(x-1)}{1-2z^2} \\ z = \frac{1-y^2}{y^2+1} \end{cases}$$

Megoldás: Legyen $y = tg\varphi$, ahol $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Ekkor az első egyenlet

$$x = \frac{(tg\varphi + 1)^2}{tg^2\varphi + 1} = 1 + sin2\varphi.$$

Most vizsgáljuk a harmadik egyenletet:

$$z = \frac{1 - tg^2\varphi}{tg^2\varphi + 1} = cos2\varphi.$$

Végül használjuk fel az előbbi két tényt a második egyenlet átalakításához.

$$tg\varphi = \frac{2cos2\varphi(1 + sin2\varphi - 1)}{1 - 2cos^2 2\varphi} = \frac{sin4\varphi}{-cos4\varphi} = -tg4\varphi.$$

A megoldandó egyenlet így

$$tg\varphi = tg(-4\varphi).$$

A megoldás $5\varphi = k\pi$, azaz $\varphi = \frac{k\pi}{5}$. Ennek a megoldásai a $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ intervallumban

$$\varphi \in \left\{-\frac{2\pi}{5},\ -\frac{\pi}{5},\ 0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Az egyenletrendszernek öt megoldása van:

$$x_1 = 1 - sin\frac{4\pi}{5},\ y_1 = -tg\frac{2\pi}{5},\ z_1 = cos\frac{4\pi}{5};$$

$$x_2 = 1 - sin\frac{2\pi}{5},\ y_2 = -tg\frac{\pi}{5},\ z_2 = cos\frac{2\pi}{5};$$

$$x_3 = 1,\ y_3 = 0,\ z_3 = 1;$$

$$x_4 = 1 + sin\frac{2\pi}{5},\ y_4 = tg\frac{\pi}{5},\ z_4 = cos\frac{2\pi}{5};$$

$$x_5 = 1 + sin\frac{4\pi}{5},\ y_5 = tg\frac{2\pi}{5},\ z_5 = cos\frac{4\pi}{5}.$$

15, *Az a, b, c, d valós számokról tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, továbbá $ac + bd = 0$. Számítsuk ki $ab + cd$ pontos értékét.*

Megoldás:A két négyzetes feltétel alapján feltehetjük, hogy $a = sin\alpha, b = cos\alpha$, illetve $c = sin\beta, d = cos\beta$. Ekkor a harmadik feltétel azonnal átírható

$$ac + bd = sin\alpha \cdot sin\beta + cos\alpha \cdot cos\beta = cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Vegyük most a kiszámítandó kifejezést és alkalmazzunk addíciós tételeket:

$$ab+cd = sin\alpha \cdot cos\alpha + sin\beta \cdot cos\beta = \frac{1}{2}\left(sin2\alpha + sin2\beta\right) = \frac{1}{2} \cdot sin(\alpha+\beta) \cdot cos(\alpha-\beta) = 0.$$

16, *Az a, b, c, d valós számokról tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, továbbá $bc + ad = 1$. Határozzuk meg $ac - bd$ értékét.*

Megoldás: Ismét érdemes az előző feladat megoldásánál már sikeres módszert követnünk. A két négyzetes feltétel alapján feltehetjük, hogy $a = sin\alpha, b = cos\alpha$, illetve $c = sin\beta, d = cos\beta$. A harmadik feltétel átírás után addíciós tétellel egyszűen kezelhető.

$$bc + ad = sin\beta \cdot cos\alpha + sin\alpha \cdot cos\beta = sin(\alpha + \beta) = 1.$$

Írjuk át a kiszámítandó kifejezést is a helyettesítés alapján

$$ac - bd = sin\alpha \cdot sin\beta - cos\alpha \cdot cos\beta = -cos(\alpha + \beta) = 0.$$

17, *Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a^2 + b^2 = 9$, $c^2 + d^2 = 16$ és $ad + bc \geq 12$. Mutassuk meg, hogy $|b + d| \leq 5$.*

Megoldás: Az előző két feladat megoldását és a négyzetösszegek nagyságát figyelemebe véve legyen most $a = 3sin\alpha, b = 3cos\alpha, c = 4sin\beta, d = 4cos\beta$. Vizsgáljuk meg először a harmadik feltételt.

$$ad + bc = 12sin\alpha \cdot cos\beta + 12cos\alpha \cdot sin\beta = 12 \cdot sin(\alpha + \beta) \geq 12.$$

A sinusfüggvény legfelejebb 1 lehet, így a feltételből azonnal adódik, hogy

$$sin(\alpha + \beta) = 1.$$

Ebből a szögek összege

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Rátérhetünk a $b + d$ átírására.

$$b+d = 3cos\alpha+4cos\beta = 3cos\alpha+4cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \alpha\right) = 3cos\alpha+4sin\alpha = 5\left(\frac{3}{5}cos\alpha + \frac{4}{5}sin\alpha\right).$$

Legyen ϕ az a hegyesszög, amelynek sinusa $\frac{3}{5}$, cosinusa pedig $\frac{4}{5}$. Ezt is figyelembe véve

$$5\left(\frac{3}{5}cos\alpha + \frac{4}{5}sin\alpha\right) = 5 \cdot sin(\alpha + \varphi).$$

Ez pedig valóban legfeljebb 5 lehet abszolút értékben.

$$|b+d| = | = 5 \cdot sin(\alpha+\varphi)| \leq 5.$$

18, *Igazoljuk, hogy* $sin^2x \cdot cos^6x \leq \frac{27}{256}$.

Megoldás: Akkor tudnánk érdemlegesen előrelépni, ha a felső becslésben megjelenne a négyzetes összefüggés. Erre csak úgy lehet esélyünk, ha szorzat helyett összeg szerepel. Ráadásul cos^2-es tagból három is lesz. Emiatt azok együtthatóinak $\frac{1}{3}$-nak kell lenniük ahhoz, hogy éppen $sin^2x + cos^2x$ szerepeljen az összegben. A szorzatból összeg számtani és mértani közép közötti összefüggéssel következhet. Mindezeket összevetve

$$\sqrt[4]{sin^2x \cdot \left(\frac{1}{3}cos^2x\right)\left(\frac{1}{3}cos^2x\right)\left(\frac{1}{3}cos^2x\right)} \leq$$

$$\leq \frac{sin^2x + \frac{1}{3}cos^2x + \frac{1}{3}cos^2x + \frac{1}{3}cos^2x}{4} = \frac{sin^2x + cos^2x}{4} = \frac{1}{4}.$$

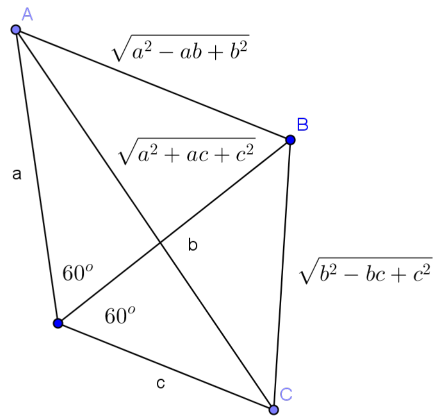
Ezt az egyenlőtlenséget negyedik hatványra emelve és 27-tel szorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

$$sin^2x \cdot cos^6x \leq \frac{27}{256}.$$

19, *Legyenek* a, b, c *pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy*

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{c^2 + ac + a^2}.$$

Megoldás: Mivel a, b, c pozitív valós számok a és b tekinthetők egy olyan háromszög oldalainak, amelyben e két oldal által bezárt szög 60°. Ezzel a választással a háromszög harmadik oldala a cosinustétel alapján $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. Hasonlóan a b és c oldalakkal rendelkező háromszgöben is válasszuk a közbezárt szöget 60°-nak. Ekkor a harmadik oldal $\sqrt{b^2 - bc + c^2}$. Rajzoljuk le a b oldalra két irányból az előbbi két háromszöget az ábra szerint.



Látjuk, hogy a feladatban szeereplő állítás a háromszög-egyenlőtlenséget jelenti az ABC háromszögben. Két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha az ABC háromszög elfajuló, a B pont az AC szakaszra illeszkedik. Ekkor a területek felírásával

$$\frac{ab \cdot sin60^\circ}{4} + \frac{bc \cdot sin60^\circ}{4} = \frac{ac \cdot sin120^\circ}{4}.$$

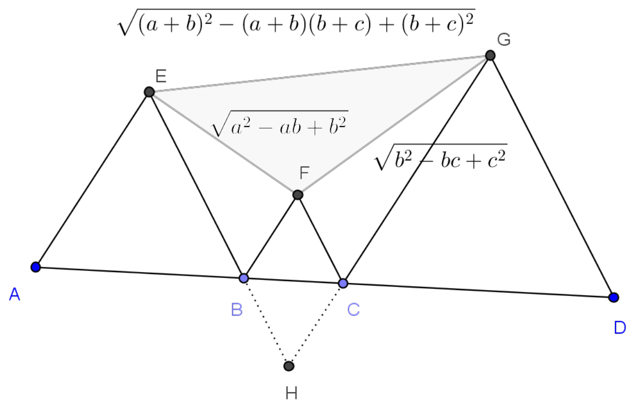
Egyszerűsítés után

$$ab + bc = ac,$$
$$b = \frac{ac}{a+c}.$$

20, *Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy*

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc}.$$

Megoldás: Az előző megoldás ötletéhez részben igazodva mérjük fel egy félegyenesre egymás mellé az a, b, c hosszúságú szakaszokat, majd szerkesszünk ezekre a szakaszokra az egyenesnek ugyanabban a félsíkjában szabályos háromszögeket.



Az ABE, BCF és CDG háromszögek szabályosak, így $EBF\angle$ és $FCG\angle$ szögek is 60°-osak. AZ EBF és FCG háromszögekre felírva a cosinustételt

$$EF = \sqrt{a^2 - ab + b^2}, \text{ és } FG = \sqrt{b^2 - bc + c^2}.$$

Az EG szakasz hosszának meghatározásához tükrözzük az E pontot az egyenesre, a tükörkép a H pont. A 60°-os szögek miatt E, B, H pontok egy szakaszra illeszkednek és ugyanez igaz természetesen a H, C és G pontokra is. Látjuk tehát, hogy az EHG háromszög H-nál fekvő szöge 60°-os, továbbá az ezt közrefogó oldalak $EH = a + b$, $HG = b + c$. Az EHG háromszög EG oldalára felírva a cosinustételt

$$EG = \sqrt{(a+b)^2 - (a+b)(b+c) + (b+c)^2}.$$

Elvégezve a műveleteket

$$EG = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc}.$$

Az EFG háromszögre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, amely bizonyítja az eredeti állítást.

Nagyon érdekes annak vizsgálata, hogy milyen feltétel mellett teljesül a pontos egyenlőség. Ez akkor következik be, ha az E, F és G pontok egy egyenesre illeszkednek. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\frac{a}{2} + b + \frac{c}{2}}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} = \frac{a + 2b + c}{a+b}.$$

Beszorzás és rendezés után

$$ac + bc - a^2 - ab = ab + 2b^2 + bc - a^2 - 2ab - ac,$$

$$2ac = 2b^2,$$

$$b = \sqrt{ac}.$$

Akkor van tehát egyenlőség, amikor b éppen az a és c mértani közepe.

21, *Igazoljuk, hogy három pozitív valós szám közül mindig kiválasztható kettő, x és y, amelyekre $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$ teljesül.*

Megoldás: Tekinthetjük a három pozitív számot három hegyesszög tangensének. Ha veszünk három hegyesszöget, akkor a skatulya-elv alapján biztosan van közöttük kettő, amelyek különbsége kisebb, mint 45°. Legyen ez a kettő $x \geq y$. Legyen $x = tg\alpha, y = tg\beta$. Ekkor biztos, hogy

$$0 \leq \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = tg(\alpha - \beta) < 1.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

22, *Bizonyítsuk be, hogy négy különböző valós szám közül mindig kiválasztható kettő, a és b úgy, hogy érvényes legyen rájuk*

$$\frac{1 + ab}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + b^2}} > \frac{1}{2}.$$

Megoldás: Tekintsük az $(1, a)$ és $(1, b)$ helyvektorokat. Ezek a vektorok az origóból az $x = 1$ egyenes egy-egy pontjába mutatnak, így biztosan 180°-nál kisebb szöget zárnak be. A négy ilyen típusú vektor mindegyikének φ argumentumára teljesül, hogy $-\frac{\pi}{2} < \varphi_k < \frac{\pi}{2}$, ezért biztosan lesz két olyan vektor, amelyek hajlásszöge kisebb, mint 60°. E kettő hajlásszögének cosinusa biztosan nagyobb lesz, mint $\frac{1}{2}$. A hajásszög cosinusát a skaláris szorzat segítségével írjuk fel:

$$cos\delta = \frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} > \frac{1}{2}.$$

23, *Mutassuk meg, hogy 13 tetszőlegesen megválasztott valós szám között mindig van olyan kettő, x és y, melyekre igaz, hogy*

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}.$$

Megoldás: Legyen a 13 darab valós szám 13 darab olyan szög tangense, amelyek mindegyikére teljesül, hogy $-\frac{\pi}{2} < \varphi_k < \frac{\pi}{2}$. Ekkor biztosan lesz – a skatulya-elv miatt – két szomszédos szög, amelyek különbsége kisebb, mint 15°. Az ezekhez tartozó x-re és y-ra ($x > y$):

$$\frac{x-y}{1+xy} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha \cdot tg\beta} = tg(\alpha-\beta) < tg15^\circ = 2-\sqrt{3}.$$

24, *Legyen $E = e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x}$. Mely valós számhármasokra teljesül, hogy*

$$\frac{e^x}{\sqrt{E+e^{2x}}} + \frac{e^y}{\sqrt{E+e^{2y}}} + \frac{e^z}{\sqrt{E+e^{2z}}} = \frac{3}{2}.$$

Megoldás: Először alakítsuk szorzattá a nevezőkben szereplő gyök alatti mennyiségeket.

$$E+e^{2x} = e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x} + e^{2x} = \left(e^x+e^y\right)\left(e^x+e^z\right),$$

$$E+e^{2y} = e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x} + e^{2y} = \left(e^y+e^z\right)\left(e^y+e^x\right),$$

$$E+e^{2z} = e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x} + e^{2z} = \left(e^z+e^x\right)\left(e^z+e^y\right).$$

Meglepő lépés következik. Mivel a fenti három szorzatban szereplő összegek mindegyike pozitív, ezért tekinthetők egy-egy pozitv szám négyzetének.

$$e^x{+}^y = a^2,\ e^y+e^z = b^2,\ \text{és } e^z+e^x = c^2.$$

Ezzel a helyettesítésel a számlálóban szereplő e hatványok is kifejezhetők. Pl.

$$e^x = \frac{e^x+e^y+e^y+e^z-e^y-e^z}{2} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}.$$

A helyettesítések elvégzése után a megoldandó egyenlet az alábbi ismerős alakot ölti:

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3}{2}.$$

Ha az a, b, c pozitív számok egy háromszög oldalai, akkor az egyenlet baloldalán szereplő tagok a cosinustételből kifejezett szögfüggvényértékek, azaz:

$$cos\alpha+cos\beta+cos\gamma=\frac{3}{2}.$$

Az pedig ismert, hogy a háromszögekre vonatkozó $cos\alpha+cos\beta+cos\gamma\leq\frac{3}{2}$ egyenlőtlenségben, akkor és csak akkor van egyenlőség, ha a háromszög szabályos. Vagyis $\alpha=\beta=\gamma=60°$, illetve $a=b=c$. Mindenképpen meg kell vizsgálnunk még, hogy az a, b, c -re teljesül-e a háromszög- egyenlőtlenség. Pontosabban fogalmazva, igaz-e, hogy

$$\sqrt{e^x+e^y}+\sqrt{e^y+e^z}>\sqrt{e^z+e^x}?$$

Mindkét oldal négyzetre emelése után, a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve:

$$e^x+e^y+e^y+e^z+2\sqrt{e^x+e^y}\sqrt{e^y+e^z}>e^z+e^x,$$

$$2e^y+2\sqrt{e^x+e^y}\sqrt{e^y+e^z}>0,$$

amely valóban igaz.

25, *A pozitív valós x, y, z számok eleget tesznek az alábbi egyenleteknek:*

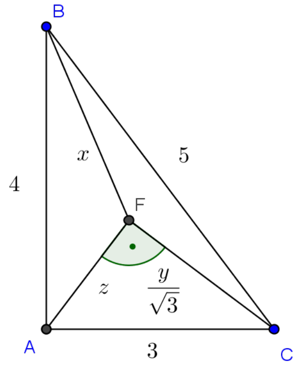
$$\begin{cases}x^2+xy+\frac{y^2}{3}=25\\ \frac{y^2}{3}+z^2=9\\ z^2+zx+x^2=16.\end{cases}$$

Határozzuk meg az $xy+2yz+3zx$ értékét.

Megoldás: Az egyes egyenletekre úgy tekintünk, mint háromszögekre vonatkozó cosinustételekre. Az első egyenletben x és $\frac{y}{\sqrt{3}}$ oldalak által közrefogott szöget 150°-nak tekintve

$$x^2+\frac{y^2}{3}-2x\frac{y}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x^2+xy+\frac{y^2}{3}=25.$$

Az x és $\frac{y}{\sqrt{3}}$ oldalak 150°-os szöget zárnak be és a szmközti oldal 5 egység. Hasonló gondolatmenettel a középső egyenletből az $y\frac{}{\sqrt{3}}$ és z befogójú derékszögű háromszög átfogója 3 egység. Végül a harmadik egyenletből a z és x oldalak által közrefogott szög 120°, a szemközti oldal pedig 4 egység. Készítsünk rajzot az eddigiek értelmezéséhez:



A három háromszög megfelelő oldalai egymáshoz illeszkednek. A harmadik oldalak pedig pitagoraszi számhármast alkotnak, az ABC háromszög derékszögű. Írjuk fel az ABC háromszög területét kétféleképpen:

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{z\frac{y}{\sqrt{3}}}{2} + \frac{x\frac{y}{\sqrt{3}}}{4} + \frac{xz\sqrt{3}}{4}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt $4\sqrt{3}$-mal.

$$24\sqrt{3} = xy + 2yz + 3zx.$$

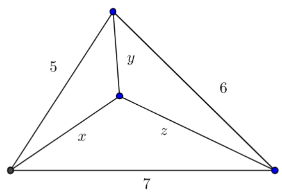
Kiszámítottuk a kérdezett kifejezés értékét.

26, *Az x, y, z pozitív valós számokra teljesül, hogy:*

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 25 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \\ z^2 + zx + x^2 = 49. \end{cases}$$

Mekkora az $xy + yz + zx$ értéke?

Megoldás: Az előző megoldás ötlete alapján három cosinustételt látunk. Most mindhárom egyenletben ugyanazok az együtthatók szerepelnek, a közbezárt szög mindhárom háromszögben 120°. A ,,külső'' háromszög oldalai $5, 6, 7$ egység hosszúságúak, továbbá az x, y, z szakaszok közös végpontja ennek a



háromszögnek az izogonális pontja.

Az $5, 6, 7$ egység oldalú háromszög területét kiszámíthatjuk pl. Heron-képlettel is:

$$T = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}.$$

A három $120°$-os háromszög területének összege ugyanennyi.

$$\frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{yz\sqrt{3}}{4} + \frac{zx\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{6},$$

$$(xy + yz + zx)\frac{\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{6},$$

$$xy + yz + zx = 24\sqrt{2}.$$

Megjegyzések:
i) Az egyenletrendszer teljes megoldása algebrai úton is megadható. Egy lehetséges módszer, hogy az egyes egyenleteket sorra megszorozzuk $(x - y)$-nal, $(y - z)$-vel, $(z - x)$-szel. Ezután a bal oldalak összege nulla, a jobb oldalaké pedig egy lineáris kifejezése x, y, z -nek. Innen az egyik ismeretlen kifejezhető és visszahelyettesítés után egy kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszert kell megoldani.
ii)Érdekesebb interpretációt ad, ha az izogonális pont tulajdonságaira támaszkodunk. A háromszög izogonális pontja úgy is megszerkeszthető, hogy az oldalakra kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk, majd ezek külső csúcsait összekötjük az átellenes háromszögcsúcsokkal. Az így kapott három szakasz az izogonális pontban metszi egymást. Ráadásul az összekötő szakaszok hossza egyforma. Jelen feladatban éppen $x + y + z$. Ezek alapján megfelelő trigonometriai számításokkal az x, y, z már ki is számolható.
iii) Ha a három ismeretlen közül kettő negatív és egy pozitív, akkor mind algebrai, mind geometriai interpretációval megadható a három ismeretlen.
iv) Amennyiben a három egyenletben a középső szorzat előjele negatív a megoldás lehetséges módszerét nem ismerem.

27, *Igazoljuk, hogy ha $c > 0$, $a > c$ és $b > c$, akkor*

$$\sqrt{(a + c)(b + c)} + \sqrt{(a - c)(b - c)} \leq 2\sqrt{ab}.$$

Megoldás: Most is trigonometriai helyettesítésre fogunk törekedni. Ennek érdekében osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\sqrt{ab}$-vel. A bizonyítandó állítás így a következő alakot ölti:

$$\sqrt{\left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{c}{a}\right)\left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq 2.$$

A feltételek alapján $\frac{c}{a}$ és $\frac{c}{b}$ 1-nél kisebb pozitív számok, tehát tekinthetők hegyesszögek cosinusainak. $\frac{c}{a} = cos\alpha$ és $\frac{c}{b} = cos\beta$ helyettesítések után az egyenlőtlenség bal oldalát addíciós tételek segítségével alakítjuk:

$$\sqrt{(1+cos\alpha)(1+cos\beta)} + \sqrt{(1-cos\alpha)(1-cos\beta)} =$$

$$= \sqrt{2cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot 2cos^2\frac{\beta}{2}} + \sqrt{2sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot 2sin^2\frac{\beta}{2}} = 2cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} + 2sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta}{2} =$$

$$= 2\left(cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} + sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta}{2}\right) = 2cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \leq 2.$$

Azonos átalakítások után látható, hogy a kifejezés valóban legfeljebb 2. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b$.

28, *Határozzuk meg az x^2+xy kifejezés maximumát, ha $x^2+y^2 = 1$ és $x > 0$, $y > 0$.*

Megoldás: A négyzetes összefüggés és az a tény, hogy mindkét ismeretlen pozitív lehetővé teszi, hogy $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ feltétel mellett $x = sin\varphi$, $y = cos\varphi$ helyettesítést alkalmazzunk. Ezután rutinszerű lépések mentén juthatunk el a maximum meghatározásáig.

$$x^2+xy = sin^2\varphi + sin\varphi \cdot cos\varphi = \frac{1}{2}(2sin^2\varphi + sin2\varphi) = \frac{1}{2}(1-cos2\varphi+sin2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sin2\varphi - \frac{1}{2}cos2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}cos2\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az is leolvasható, hogy a maximumot a $\varphi = \frac{3\pi}{8}$ szög esetén, azaz $x = sin\frac{3\pi}{8}$, $y = cos\frac{3\pi}{8}$ esetén veszi fel a kifejezés.

medskip

29, *Mutassuk meg, hogy $-1 \leq x \leq 1$ feltétel teljesülése esetén*

$$(2x\sqrt{1-x^2} + 2x^2 - 1)^2 \leq 2.$$

Megoldás: Az x-re vonatkozó feltétel miatt helyettesíthetünk $x = cos\varphi$-t, ahol $0 \leq \varphi \leq \pi$. Alakítsuk azonosan a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát az addíciós tételek segítségével.

$$(2cos\varphi sin\varphi + cos2\varphi)^2 = (sin2\varphi + cos2\varphi)^2 = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}cos2\varphi\right)\right]^2 =$$

$$= 2 \cdot sin^2\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, azaz

$$\varphi = \frac{\pi}{8}, \text{ vagy } \varphi = \frac{5\pi}{8}.$$

Az ezeknek megfelelő x értékek:

$$x_1 = cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$x_2 = cos\frac{5\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

30, *Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:*

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Megoldás: Legyen $x = tg\alpha, y = tg\beta$, ahol $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. Innen a tangens szögfüggvény definíciója és addíciós tételek segítségével tudunk továbbhaladni.

$$\frac{(tg\alpha + tg\beta)(1 - tg\alpha \cdot tg\beta)}{(1 + tg^2\alpha)(1 + tg^2\beta)} = \frac{(sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta)(cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta)}{1 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1}{2}2sin(\alpha + \beta) \cdot cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}sin2(\alpha + \beta).$$

Tudjuk, hogy $-1 \leq sin2(\alpha + \beta) \leq 1$, tehát az állítást igazoltuk.

31, *Az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $ab+bc+ca = 1$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

Megoldás: Ez egy nagyon tipikus példa arra, amikor algebrai feladat hátterében egy vagy több trigonometriai összefüggés húzódik meg. Ebben a különleges esetben ez még további érdekességet is hordoz.

Először is alkalmazzunk $a = tg\frac{\alpha}{2}, b = tg\frac{\beta}{2}, c = tg\frac{\gamma}{2}$ helyettesítéseket, ahol azt is feltehetjük, hogy $0 < \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$. Írjuk be ezeket a helyettesített értékeket a feladatban megadott feltételbe.

$$tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\gamma}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Fejezzük ki az egyenletből $tg\frac{\gamma}{2}$-et.

$$tg\frac{\gamma}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)=1-tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2},$$

$$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1-tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}.$$

A jobb oldalon álló kifejezés egy addíciós tételben szereplő formula reciproka.

$$\frac{1}{tg\frac{\gamma}{2}}=tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$ctg\frac{\gamma}{2}=tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Az α,β,γ tehát egy háromszög szögei. Talán most következik a feladat külön érdekessége, a másik trigonometriai összefüggés. Ismert tény, hogy háromszög szögeire teljesül a

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma \tag{1}$$

összefüggés is. Ezek a szögfüggvényértékek a kétszeres szögek tangensére vonatkozó tétel alapján esetünkben kifejezhetők $a=tg\frac{\alpha}{2}, b=tg\frac{\beta}{2}, c=tg\frac{\gamma}{2}$ segítségével:

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2a}{1-a^2},\ tg\beta=\frac{2b}{1-b^2},\ tg\gamma=\frac{2c}{1-c^2}.$$

Végül nincsen más dolgunk, mint ezeket beírni az (1) azonosságba:

$$\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}+\frac{2c}{1-c^2}=\frac{8abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)},$$

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

Hasonló módszerekkel oldható meg a következő két feladat is.

32, *Adottak az a,b,c pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy $abc=a+b+c$. Igazoljuk, hogy*

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}=1.$$

Megoldás: Mivel az a, b, c tetszőleges pozitív valós számok, ezért az $a = tg\alpha, b = tg\beta, c = tg\gamma$ helyettesítés most is alkalmazható úgy, hogy $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Fejezzük ki a feltételből c-t és írjuk be a helyettesített kifejezéseket.

$$-c = \frac{a+b}{1-ab},$$
$$-tg\gamma = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta},$$
$$-tg\gamma = tg(\alpha + \beta).$$

A szögek nagysága miatt ebből már következik, hogy $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, vagyis egy háromszög szögeiről van szó. A következő lépés a bizonyítandó állításban szereplő egyes tagok trigonometriai megfelelőinek megtalálása.

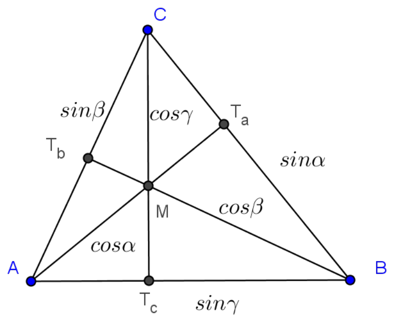
$$\frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha + cos^2\alpha} = cos^2\alpha.$$

A többi tagok hasonló átírása után a bizonyítandó egyenlőség a következő alakú lesz:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + 2cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma = 1.$$

Ennek igazolásához geometriai interpretációt használnuk, amely önmagában is nagyon érdekes és sok esetben nagyon jól használható.

Legyen egy α, β, γ szögekkel rendelkező háromszög köré írt körének sugara az egyszerűbb kezelhetőség érdekében $\frac{1}{2}$. Ekkor az oldalai a sinustétel alapján $sin\alpha, sin\beta, sin\gamma$. Legyenek most α, β, γ először mind hegyesszögek. Akkor az ábra szerint



$AT_b = sin\gamma \cdot cos\alpha$ és $AMT_b\angle = \gamma$. Az AMT_b háromszögből $AM = \frac{AT_b}{sin\gamma} = \frac{sin\gamma \cdot cos\alpha}{sin\gamma} = cos\alpha$. Ugyanezzel a számolási módszerrel $BM = cos\beta$ és $CM = cos\gamma$. Az eddigiek felhasználásával írjuk fel a cosinustételt az AMB háromszög AB oldalára:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot cos(180° - \gamma),$$

$$sin^2\gamma = cos^2\alpha + cos^2\beta - 2cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos(180^\circ - \gamma),$$
$$1 - cos^2\gamma = cos^2\alpha + cos^2\beta + 2cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma.$$

Ahonnan $cos^2\gamma$ hozzáadásával a bizonyítandó állítás adódik. Derékszögű háromszög esetén az egyik szög cosinusa nulla, a másik két szög egymás pótszöge, így az állítás a négyzetes összefüggéssel ekvivalens. Meg kell vizsgálnunk azt az esetet, amikor a háromszög tompaszögű. Legyen pl. $\gamma > 90^\circ$. Ekkor $AT_c = AC \cdot cos\alpha = sin\beta \cdot cos\alpha$. Az $MAT_c\angle = 90^\circ - \beta$, így

$$AM = \frac{AT_c}{cos(90^\circ - \beta)} = \frac{sin\beta \cdot cos\alpha}{sin\beta} = cos\alpha.$$

A másik hegyesszöghöz tartozó BM szakaszra is ugyanez elmondható, $BM = cos\beta$. Ezután pedig az AMB háromszög AB oldalra kell szintén felírni a cosinustételt. Innen a befejezés már megegyezik a hegyesszögű esettel.

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}} = 1.$$

33, *Legyenek az* a, b, c *olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy* $ab \neq -1, bc \neq -1$ *és* $ca \neq -1$. *Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ca}.$$

Megoldás: Legyen $a = tg\alpha, b = tg\beta, c = tg\gamma$, ahol $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ekkor az addíciós tétel alapján a bizonyítandó állítás:

$$tg(\alpha - \beta) + tg(\beta - \gamma) + tg(\gamma - \alpha) = tg(\alpha - \beta) \cdot tg(\beta - \gamma) \cdot tg(\gamma - \alpha).$$

A bizonyítás érdekében írjuk fel a $(\beta - \gamma)$ és $(\gamma - \alpha)$ szögek összegének tangensére vonatkozó addíciós tételt.

$$\frac{tg(\beta - \gamma) + tg(\gamma - \alpha)}{1 - tg(\beta - \gamma) \cdot tg(\gamma - \alpha)} = tg(\beta - \gamma + \gamma - \alpha) = tg(\beta - \alpha) = -tg(\alpha - \beta).$$

Ebből beszorzás és rendezés után éppen a bizonyítandó állítás adódik.

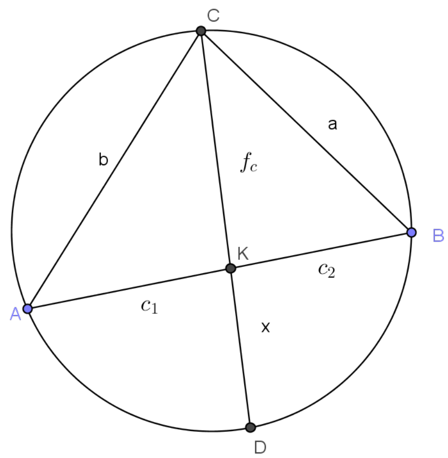
$$tg(\beta - \gamma) + tg(\gamma - \alpha) = -tg(\alpha - \beta) + tg(\alpha - \beta) \cdot tg(\beta - \gamma) \cdot tg(\gamma - \alpha),$$

$$tg(\alpha - \beta) + tg(\beta - \gamma) + tg(\gamma - \alpha) = tg(\alpha - \beta) \cdot tg(\beta - \gamma) \cdot tg(\gamma - \alpha).$$

Azt is látjuk, hogy a háromszög szögeinek tangenseire vonatkozó azonosság abban az esetben is teljesül, ha a három darab szög összege nulla.

34, *Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezőjének négyzete egyenlő a közrefogó oldalak szorzatának és azon két szakasz szorzatának különbségével, amelyekre a szögfelező a szemközti oldalt bontja*

Megoldás: A háromszög adatainak szokásos jelölése mellett legyen a C-ből induló szögfelező és a köré írt kör metszéspontja D, a szögfelező és az AB oldal metszéspontja pedig K. A K pont a CD szakaszt f_c és x hosszúságú szakaszokra, az AB szakaszt c_1 és c_2 hosszúságú szakaszokra bontja.



A K pont körre vonatkozó hatványa alapján tudjuk, hogy

$$f_c \cdot x = c_1 \cdot c_2.$$

A szögfelezés és a kerületi szögek egyenlősége miatt a CBK és CDA háromszögek hasonlóak, a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{a}{f_c} = \frac{f_c + x}{b},$$

$$ab = f_c^2 + x \cdot f_c.$$

Az $f_c \cdot x = c_1 \cdot c_2$ egyenlőséget felhasználva innen már a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$f_c^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2.$$

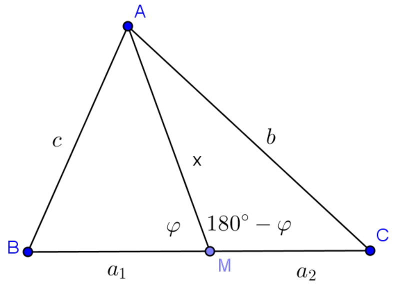
Az állításból azonnal adódik az is, hogy a háromszög bármelyik oldala kisebb a közrefogó oldalak mértani közepénél:

$$f_c < \sqrt{ab}.$$

35, *Adott az ABC háromszög, továbbá BC oldalának egy M belső pontja. Mutassuk meg, hogy*

$$BC \cdot MA^2 = MC \cdot AB^2 + BM \cdot CA^2 - BM \cdot MC \cdot BC \text{ (Stewart tétele).}$$

Megoldás: Betűzzük át a bizonyítandó állítást az ábra jelölései szerint.



$$a \cdot x^2 = a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot b^2 - a_1 \cdot a_2 \cdot a.$$

Írjuk fel a cosinustételt előbb a BMA háromszög AB oldalára, majd CMA háromszög AC oldalára:

$$c^2 = a_1^2 + x^2 - 2a_1 \cdot x \cdot cos\varphi,$$

$$b^2 = a_2^2 + x^2 - 2a_2 \cdot x \cdot cos(180° - \varphi) = a_2^2 + x^2 + 2a_2 \cdot x \cdot cos\varphi.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet a_2-vel, a másodikat a_1-gyel és adjuk össze a két egyenlet megfelelő oldalait:

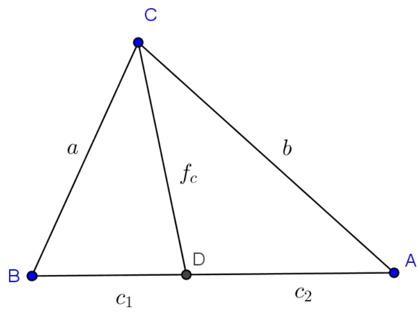
$$a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot b^2 = a_1 \cdot a_2(a_1 + a_2) + (a_2 + a_1)x^2.$$

Rendezés után:

$$a \cdot x^2 = a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot b^2 - a_1 \cdot a_2 \cdot a.$$

36, *Alkalmazzuk az előbbi általános eredményt a háromszög belső szögfelezőjének kiszámítására!*

Megoldás: Alkalmazzuk a Stewart-tételt az ábra jelöléseinek megfeleleően:



A belső szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja ketté, ezért

$$c_1 = \frac{ac}{a+b}, \quad c_2 = \frac{bc}{a+b}.$$

Ezzel a kiegészítéssel használjuk a Stewart-tételt:

$$c \cdot f_c^2 = \frac{bc}{a+b} \cdot a^2 + \frac{ac}{a+b} \cdot b^2 - \frac{abc^2}{(a+b)^2} \cdot c,$$

$$f_c^2 = \frac{a^2b + ab^2}{a+b} - \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+b},$$

$$f_c^2 = ab - c_1 \cdot c_2.$$

Az eredmény a 34. feladat feladat megoldásában kapott képlettel megegyező. Természetesen most is megjegyezhetjük, hogy $f_c < \sqrt{ab}$.

37, *Igazoljuk, hogy a háromszög belső szögfelezője kisebb, mint a közrefogó oldalak harmonikus közepe.*

Megoldás: Legyenek jelöléseink a 36. feladat szerintiek, továbbá jelöljük a háromszög C-nél fekvő szögét γ-val. A megoldás alapötlete az, hogy az ABC háromszög területét kétféleképpen felírjuk a trigonometrikus területképlettel.

$$T_{ABC} = T_{ADC} + T_{DBC},$$

$$\frac{absin\gamma}{2} = \frac{a \cdot f_c \cdot sin\frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{b \cdot f_c \cdot sin\frac{\gamma}{2}}{2}.$$

Segítségül hívjuk a $sin\gamma = 2sin\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2}$ azonosságot és egyszerűsítünk $sin\frac{\gamma}{2}$-lel.

$$2abcos\frac{\gamma}{2} = a \cdot f_c + b \cdot f_c,$$

$$f_c = \frac{2ab}{a+b}cos\frac{\gamma}{2}.$$

Mivel a $\frac{\gamma}{2}$ hegyesszög azt is beláttuk ezzel, hogy f_c kisebb a harmonikus középnél is.

$$f_c < \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}.$$

38, *Igazoljuk, hogy a háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha oldalai és szögei között fennáll a következő összefüggés:*

$$a \cdot cos\beta + b \cdot cos\gamma + c \cdot cos\alpha = \frac{a+b+c}{2}.$$

Megoldás: Fejezzük ki a háromszög oldalait a köré írt kör sugarával és a szemközti szögek sinusaival.

$$a = 2Rsin\alpha,\ b = 2Rsin\beta,\ c = 2Rsin\gamma.$$

Az előbbiekkel alakítsuk azonosan az állításban szereplő egyenlőséget.

$$2sin\alpha cos\beta + 2sin\beta cos\gamma + 2sin\gamma cos\alpha = sin\alpha + sin\beta + sin\gamma.$$

Addíciós tételek segítségével a baloldalt továbbalakítjuk:

$$sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)+sin(\beta+\gamma)+sin(\beta-\gamma)+sin(\gamma+\alpha)+sin(\gamma-\alpha) = sin\alpha+sin\beta+sin\gamma.$$

A háromszög szögeinek összege 180° és a kiegészítő szögek sinusa megegyezik, így az összefüggés még jobban egyszerűsíthető:

$$sin(\alpha-\beta) + sin(\beta-\gamma) + sin(\gamma-\alpha) = 0.$$

A baloldalt azonos átalakításokkal - az addíciós tételek sorozatos alkalmazásával - szorzattá alakítjuk:

$$sin(\alpha-\beta)+sin(\beta-\gamma)+sin(\gamma-\alpha) = 2sin\frac{\alpha-\gamma}{2}cos\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2} - sin(\alpha-\gamma) =$$

$$= 2sin\frac{\alpha-\gamma}{2}cos\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2} - 2sin\frac{\alpha-\gamma}{2}cos\frac{\alpha-\gamma}{2} =$$

$$2sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\left[cos\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2} - cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right] = -4sin\frac{\alpha-\gamma}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}sin\frac{\gamma-\beta}{2}.$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, tehát a háromszög egyenlő szárú.

39, *Legyenek x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy $x + y + z = xyz$. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}.$$

Megoldás: Az x, y, z pozitív valós számok, ezért helyettesíthetünk $x = tg\alpha, y = tg\beta, z = tg\gamma$ szögfüggvényértékeket, ahol $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Ha α, β, γ hegyesszögek, akkor a

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = t\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma$$

egyenlőségből következik, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, α, β, γ egy háromszög szögei.

Másrészt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{cos^2\alpha}}} = \frac{1}{\frac{1}{cos\alpha}} = cos\alpha,$$

és hasonló módon

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = cos\beta, \ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = cos\gamma.$$

Azt kell tehát a továbbiakban igazolnunk, hogy amennyiben α, β, γ egy hegyesszögű háromszög szögei, akkor

$$cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyítására számos módszer létezik. Itt most egy teljesen goniometriai módszert, azonos trigonometriai és algebrai átalakítások módszerét választottuk. A megoldás során felhasználjuk, hogy $cos\gamma = -cos(\alpha+\beta) = -cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$. Az egyenlőtlenség teljesüléséhez azt kell igazolni, hogy

$$3 - 2(cos\alpha + cos\beta + cos\gamma) \geq 0.$$

Az eddigiek felhasználásával

$$3 - 2(cos\alpha + cos\beta + cos\gamma) =$$

$$= sin^2\alpha - 2sin\alpha sin\beta + sin^2\beta + cos^2\alpha + cos^2\beta + 1 - 2cos\alpha - 2cos\beta + 2cos\alpha cos\beta =$$

$$= (sin\alpha - sin\beta)^2 + (cos\alpha + cos\beta - 1)^2 \geq 0.$$

Az állítás tehát igaz. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\alpha = \beta$, továbbá $cos\alpha = cos\beta = \frac{1}{2}$, azaz a háromszög szabályos.

40, *Legyenek most a, b, c tetszőleges valós számok. Mutassuk meg, hogy*

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

Megoldás: Mivel most az a, b, c tetszőleges valós számok, ezért ismét alkalmazhatjuk az $a = tg\alpha, b = tg\beta, c = tg\gamma$ helyettesítést azzal a feltétellel, hogy $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Ekkor a jobb oldali tényezők

$$a^2 + 1 = tg^2\alpha + 1 = \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + 1 = \frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}.$$

Miután a másik két tényezőt is átírtuk, érdemes a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozni a pozitív $cos^2\alpha cos^2\beta cos^2\gamma$ kifejezéssel. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens átalakítással több lépésben a következő alakra hozható:

$$\left(\left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha}\frac{sin\beta}{cos\beta}+\frac{sin\beta}{cos\beta}\frac{sin\gamma}{cos\gamma}+\frac{sin\gamma}{cos\gamma}\frac{sin\alpha}{cos\alpha}-1\right)cos\alpha cos\beta cos\gamma\right)^2\leq 1,$$

$$(sin\alpha sin\beta cos\gamma+cos\alpha sin\beta sin\gamma+sin\alpha cos\beta sin\gamma-cos\alpha cos\beta cos\gamma)^2\leq 1,$$

$$[sin\beta\,(sin\alpha cos\gamma+cos\alpha sin\gamma)-cos\beta\,(cos\alpha cos\gamma-sin\alpha sin\gamma)]^2\leq 1,$$

$$[sin\beta sin(\alpha+\gamma)-cos\beta cos(\alpha+\gamma)]^2\leq 1,$$

$$[-cos(\alpha+\beta+\gamma)]^2\leq 1,$$

$$cos^2(\alpha+\beta+\gamma)\leq 1.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz. Mivel minden lépésben csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, az állítást igazoltuk.

41, *Bizonyítsuk be, hogy a* $8x^3-4x^2-4x+1=0$ *egyenlet egyik gyöke* $cos\frac{\pi}{7}$.

Megoldás: Az egyszerűbb leírás érdekében vezessük be az $\alpha=\frac{\pi}{7}$ jelölést. Tudjuk, hogy

$$3\alpha+4\alpha=\pi,$$

ezért sinusaik megegyeznek.

$$sin3\alpha=sin4\alpha,$$

$$sin\alpha\left(3-4sin^2\alpha\right)=2sin2\alpha\cdot cos2\alpha=4sin\alpha\cdot cos\alpha\left(2cos^2\alpha-1\right).$$

Most egyszerűsítsünk $sin\alpha$-val és térjünk át egységesen a cosinus szögfüggvényre:

$$3-4(1-cos^2\alpha)=8cos^3\alpha-4cos\alpha,$$

$$8cos^3\alpha-4cos^2\alpha-4cos\alpha+1=0.$$

Az állítás igaz.

42, *Legyenek egy hegyesszögű háromszög oldalai* a,b,c, *területe* T. *Mutassuk meg, hogy*

$$\sqrt{a^2b^2-4T^2}+\sqrt{b^2c^2-4T^2}+\sqrt{c^2a^2-4T^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Megoldás: A trigonometrikus területképlet felhasználásával alakítsuk át a gyökös kifejezéseket:

$$\sqrt{a^2b^2 - 4T^2} = \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2 sin^2\gamma} = ab \cdot cos\gamma.$$

Ugyanezzel a módszerrel kapjuk, hogy

$$\sqrt{b^2c^2 - 4T^2} = bc \cdot cos\alpha, \ \sqrt{c^2a^2 - 4T^2} = ca \cdot cos\beta.$$

Ezeket a szorzatokat az egyes oldalakra felírt cosinustételekből fejezhetjük ki:

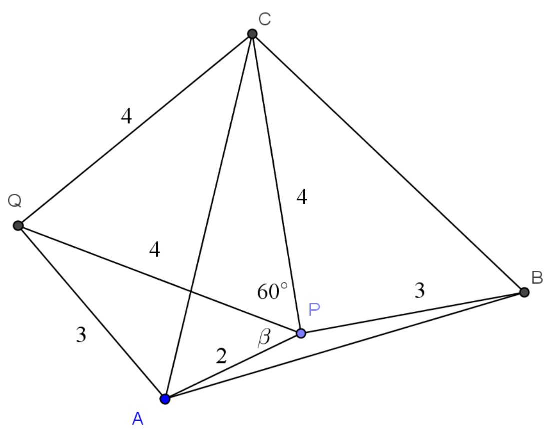
$$2ab \cdot cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$2bc \cdot cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2,$$
$$2ca \cdot cos\beta = c^2 + a^2 - b^2.$$

A három egyenletet összeadva a bizonyítandó állítás adódik.

$$ab \cdot cos\gamma + bc \cdot cos\alpha + ca \cdot cos\beta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

43, *Egy szabályos háromszög egyik belső pontjának a csúcsoktól vett távolságai* $2, 3$ *és* 4 *cm. Mekkora a szabályos háromszög oldala?*

Megoldás: Forgassuk el a PBC háromszöget a C pont körül $60°$-kal az óramutató járásával megegyező irányba. Ekkor a C pont helyben marad, a B pont az A pontba kerül, továbbá a P pont képe a Q, a mellékelt ábra szerint. A forgatás miatt QPC szabályos háromszög, amelynek oldala 4 egység.



A következőkben az APQ háromszögből kiszámítjuk a β szög szögfüggvényeit, majd az APC háromszögből az AC oldalt. Először az AQ oldalra felírt cosinustételből

$$cos\beta = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{11}{16}.$$

A négyzetes azonosságból ki tudjuk számítani $sin\beta$ értékét is.

$$sin\beta = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}.$$

Az APC háromszög AC-vel szemközti szöge β+60°, ezért szükség van $cos(\beta +$ 60°) pontos értékére:

$$\beta + 60^\circ = cos\beta \cdot cos60^\circ - sin\beta \cdot sin60^\circ = \frac{11}{32} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{11}{32} - \frac{9\sqrt{5}}{32}.$$

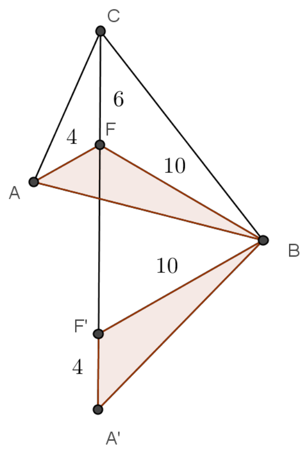
S végül következhet az APC háromszögben az AC oldalra felírt cosinustétel:

$$AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{11}{32} - \frac{9\sqrt{5}}{32} \right) = 20 - \frac{11}{2} + \frac{9\sqrt{5}}{2} = \frac{29 + 9\sqrt{5}}{2}.$$

$$AC = \sqrt{\frac{29 + 9\sqrt{5}}{2}}.$$

44, *Az ABC háromszög belsejében felvett F pontot a csúcsokkal összekötő szakaszok egymással egyenlő szöget zárnak be. Ha ezek a szakaszok rendre 4 cm, 6 cm és 10 cm hosszúságúak, akkor mekkorák az ABC háromszög oldalai?*

Megoldás: Először készítsünk ábrát!



Mivel az összekötő szakaszok egymással egyenlő szögeket zárnak be, ezért az F pont a háromszög izogonális pontja (v. Fermat-féle pontja). Frogassuk el az FAB háromszöget a B pont körül pozitív irányba $60°$-kal. A forgatás szögéből tudjuk, hogy az $FF'B$ háromszög szabályos háromszög, továbbá CFB és $BF'A'$ szögek $120°$-osak, tehát a C, F, F', A' pontok egy egyenesre illeszkednek. Ezután már a háromszög c oldalát azonnal megkaphatjuk, ha a BFA' háromszög $A'B$ oldalára felírjuk a cosinustételt:

$$c^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot cos60°,$$

$$c^2 = 100 + 196 - 140 = 156,$$

$$c = 2\sqrt{39}.$$

Ugyanezzel a módszerrel, BCF és CAF háromszögek forgatásával megkapjuk a háromszög a és b oldalát:

$$a^2 = 10^2 + 16^2 - 10 \cdot 16 = 100 + 256 - 160 = 196,$$

$$a = 14.$$

$$b^2 = 6^2 + 10^2 - 6 \cdot 10 = 136 - 60 = 76,$$

$$b = 2\sqrt{19}.$$

A megoldás során azt is ismert tényt is látjuk, hogy a háromszög izogonális pontját úgy is megkaphatjuk, ha a háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket írunk, majd ezek külső csúcsait összekötjük a háromszög átellenes csúcsával. A három szakasz metszéspontja az izogonális pont. Ez a három összekötő szakasz egyenlő hosszúságú is, az izogonális pont csúcsoktól vett távolságainak összegével megegyező. Természetesen a fent elmondottak csak abban az esetben igazak, ha a háromszögnek egyáltalán van izogonális pontja, mindegyik szöge kisebb, mint $120°$.

45, *Egy háromszög 8 dm-es oldalával szemben kétszer akkora szög fekszik, mint az 5 dm-esssel szemben. Mekkora a harmadik oldal?*

Megoldás: Legyen $a = 5, b = 8, \beta = 2\alpha$. A sinustétel alapján

$$\frac{b}{a} = \frac{8}{5} = \frac{sin\beta}{sin\alpha} = \frac{2sin\alpha \cdot cos\alpha}{sin\alpha} = 2cos\alpha.$$

Tehát

$$cos\alpha = \frac{4}{5}, \text{ és a négyzetes összefüggésből } sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

A háromszög c oldalával szemközti szög $180° - 3\alpha$, ennek a szögnek a cosinusát addíciós tételekkel többféle módon is megkaphatjuk.

$$cos(180° - 3\alpha) = -cos3\alpha = -4cos^3\alpha + 3cos\alpha = -4 \cdot \frac{64}{125} + \frac{12}{5} = \frac{44}{125}.$$

A c oldal innen már cosinustétellel számolható:

$$c^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{44}{125} = \frac{1521}{25},$$

$$c = \frac{39}{5}.$$

A $cos3\alpha$ számítására egy másik lehetséges utat is bemutatunk.

$$cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}, sin2\alpha = 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{24}{25}.$$

$$cos3\alpha = cos\alpha \cdot cos2\alpha - sin\alpha \cdot sin2\alpha = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{25} - \frac{3}{5} \cdot \frac{24}{25} = -\frac{44}{125}.$$

46, *Egy 1 cm sugarú kör körvonalát négy részre osztjuk, a keletkező ívek aránya* 1 : 2 : 3 : 4. *Számítsuk ki a négy osztópont által meghatározott húrnégyszög területét.*

Megoldás: Az ívek hosszának aránya megegyezik a megfelelő középponti szögek arányával. Emiatt a középponti szögek rendre $36°, 72°, 108°, 144°$. A húrnégyzsög területe négy darab egyenlő szárú háromszög területének összegeként adódik. A háromszgöek területét trigonometrikus területképettel tudjuk számolni.

$$2T = sin36° + sin72° + sin108° + sin144° = 2sin36° + 2sin72°.$$

Kettővel osztva és szorzattá alakítás után

$$T = sin36° + sin72° = 2 \cdot sin54° \cdot cos18° = 2cos36° \cdot cos18°.$$