Trigonometriai módszerek algebrai és geometriai feladatokban

Feladatok

1, Oldjuk meg az egyenletet.

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$$

2, Oldjuk meg az egyenletet.

$$x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}(2x^2-1)$$

3, Hány megoldása van a $[0,1]$ intervallumban a következő egyenletnek?

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$$

4, Oldjuk meg az egyenletet.

$$8x^3-6x-1=0$$

5, Oldjuk meg az egyenletet.

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$$

6, Oldjuk meg az egyenletet.

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$$

7, Oldjuk meg az egyenletet.

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$$

8, Oldjuk meg az egyenletet.

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$$

9, Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\begin{cases}4xy(2x^2-1)=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

10, Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\begin{cases}4xy(x^2-y^2)=-1\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

11, Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\begin{cases}x+\sqrt{1-y^2}=1\\y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}\end{cases}$$

12, Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

13, Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^3y - xy^3 = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

14, Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$\begin{cases} x = \frac{(y+1)^2}{y^2+1} \\ y = \frac{2z(x-1)}{1-2z^2} \\ z = \frac{1-y^2}{y^2+1} \end{cases}$$

15, Az a, b, c, d valós számokról tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, továbbá $ac + bd = 0$. Számítsuk ki $ab + cd$ pontos értékét.

16, Az a, b, c, d valós számokról tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, továbbá $bc + ad = 1$. Határozzuk meg $ac - bd$ értékét.

17, Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a^2 + b^2 = 9$, $c^2 + d^2 = 16$ és $ad + bc \geq 12$. Mutassuk meg, hogy $|b + d| \leq 5$.

18, Igazoljuk, hogy $sin^2x \cdot cos^6x \leq \frac{27}{256}$.

19, Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{c^2 + ac + a^2}.$$

20, Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc}.$$

21, Igazoljuk, hogy három pozitív valós szám közül mindig kiválasztható kettő, x és y, amelyekre $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$ teljesül.

22, Bizonyítsuk be, hogy négy különböző valós szám közül mindig kiválasztható kettő, a és b úgy, hogy érvényes legyen rájuk

$$\frac{1 + ab}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + b^2}} > \frac{1}{2}.$$

23 Mutassuk meg, hogy 13 tetszőlegesen megválasztott valós szám között mindig van olyan kettő, x és y, melyekre igaz, hogy

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

24, Legyen $E = e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x}$. Mely valós számhármasokra teljesül, hogy

$$\frac{e^x}{\sqrt{E + e^{2x}}} + \frac{e^y}{\sqrt{E + e^{2y}}} + \frac{e^z}{\sqrt{E + e^{2z}}} = \frac{3}{2}.$$

25, A pozitív valós x, y, z számok eleget tesznek az alábbi egyenleteknek:

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Határozzuk meg az $xy + 2yz + 3zx$ értékét.

26, Az x, y, z pozitív valós számokra teljesül, hogy:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 25 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \\ z^2 + zx + x^2 = 49. \end{cases}$$

Mekkora az $xy + yz + zx$ értéke?

27, Igazoljuk, hogy ha $c > 0$, $a > c$ és $b > c$, akkor

$$\sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)} \leq 2\sqrt{ab}.$$

28, Határozzuk meg az $x^2 + xy$ kifejezés maximumát, ha $x^2 + y^2 = 1$ és $x > 0$, $y > 0$.

29, Mutassuk meg, hogy $-1 \leq x \leq 1$ feltétel teljesülése esetén

$$(2x\sqrt{1-x^2} + 2x^2 - 1)^2 \leq 2.$$

30, Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

31, Az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $ab + bc + ca = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}.$$

32, Adottak az a, b, c pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy $abc = a + b + c$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}} = 1.$$

33, Legyenek az a, b, c olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy $ab \neq -1$, $bc \neq -1$ és $ca \neq -1$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ca}.$$

34, Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezőjének négyzete egyenlő a közrefogó oldalak szorzatának és azon két szakasz szorzatának különbségével, amelyekre a szögfelező a szemközti oldalt bontja.

35, Adott az ABC háromszög, továbbá BC oldalának egy M belső pontja. Mutassuk meg, hogy

$$BC \cdot MA^2 = MC \cdot AB^2 + BM \cdot CA^2 - BM \cdot MC \cdot BC \text{ (Stewart tétele).}$$

36, Alkalmazzuk az előbbi általános eredményt a háromszög belső szögfelezőjének kiszámítására!

37, Igazoljuk, hogy a háromszög belső szögfelezője kisebb, mint a közrefogó oldalak harmonikus közepe.

38, Igazoljuk, hogy a háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha oldalai és szögei között fennáll a következő összefüggés:

$$a \cdot cos\beta + b \cdot cos\gamma + c \cdot cos\alpha = \frac{a+b+c}{2}.$$

39, Legyenek x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy $x+y+z = xyz$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

40, Legyenek most a, b, c tetszőleges valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$(ab+bc+ca-1)^2 \leq (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

41, Bizonyítsuk be, hogy a $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke $cos\frac{\pi}{7}$.

42, Legyenek egy hegyesszögű háromszög oldalai a, b, c, területe T. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{a^2b^2 - 4T^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4T^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4T^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

43, Egy szabályos háromszög egyik belső pontjának a csúcsoktól vett távolságai $2, 3$ és 4 cm. Mekkora a szabályos háromszög oldala?

44, Az ABC háromszög belsejében felvett F pontot a csúcsokkal összekötő szakaszok egymással egyenlő szöget zárnak be. Ha ezek a szakaszok rendre 4 cm, 6 cm és 10 cm hosszúságúak, akkor mekkorák az ABC háromszög oldalai?

45, Egy háromszög 8 dm-es oldalával szemben kétszer akkora szög fekszik, mint az 5 dm-esssel szemben. Mekkora a harmadik oldal?

46, Egy 1 cm sugarú kör körvonalát négy részre osztjuk, a keletkező ívek aránya $1 : 2 : 3 : 4$. Számítsuk ki a négy osztópont által meghatározott húrnégyszög területét.