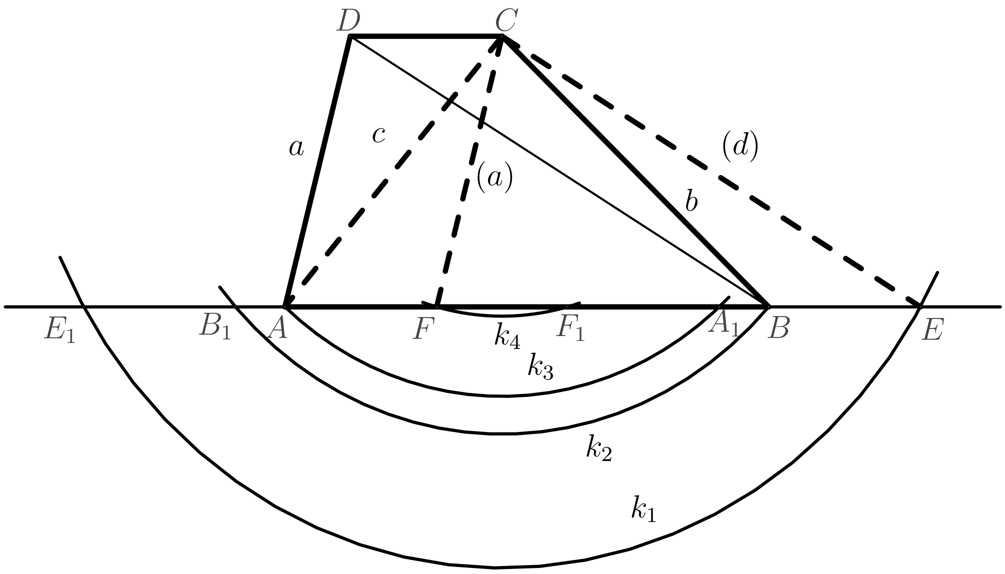
806. Szerkesszünk trapézt a száraiból és az átlóiból!

1. megoldás: A trapéz szárai a, b, átlói c, d. Készítsünk vázlatot a megoldáshoz. A kisebbik párhuzamos oldalnak C szögpontjából húzzunk párhuzamost az a szárral és a d átlóval. Így kapjuk az AB egyenesen az F és az E pontot. Így $AF = BE = CD$. Rajzoljunk azután C középpontból négy koncentrikus kört a C-ből induló megadott hosszúságú a, c, b és d sugárral. A két külső kör és belső kör is CD hosszúságú szakaszt metsz le tehát az AB egyenesből. (A négy szakasz nagyság-viszonya más is lehet, akkor is hasonlóan járhatunk el.)



A feladat: szerkesszük meg azt a szelőt, amely négy koncentrikus kört úgy metsz, hogy a két külső kör közé eső szakasza egyenlő hosszúságú a két belső kör közé eső szakaszával. Áttekinthetőbb jelölést alkalmazva legyen a négy koncentrikus kör k_1, k_2, k_3, k_4, sugaruk rendre r_1, r_2, r_3, r_4. A kívánt tulajdonságú szelő metsze a köröket az A, A' ; B, B' ; C, C' ; D, D' pontokban. A feltétel szerint:

$$AB = CD = D'C' = B'A',$$

és

$$AD' = AB + BC' - D'C' = BC'$$

ezért

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AD \cdot AD'}{BC \cdot BC'}.$$

De $AD \cdot AD'$ az A pontnak a k_4 körre, a $BC \cdot BC'$ pedig a B pontnak a k_3 körre vontakozó hatványa:

$$AD \cdot AD' = r_1^2 - r_4^2$$
$$BC \cdot BC' = r_2^2 - r_3^2.$$

Így

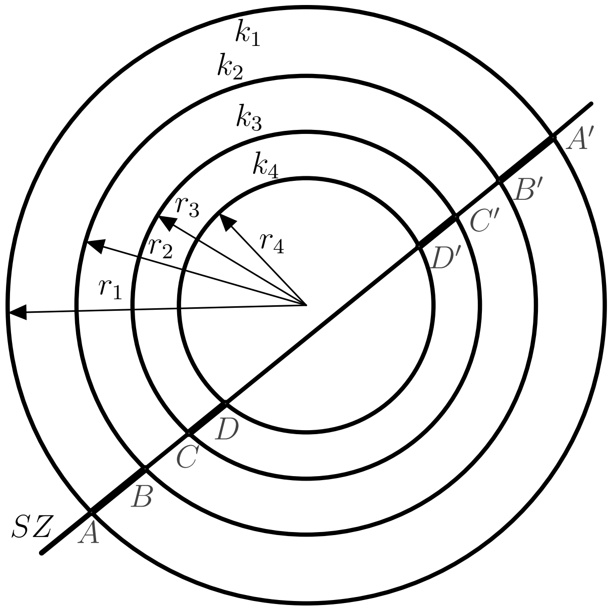
$$\frac{AD}{BC} = \frac{r_1^2 - r_4^2}{r_2^2 - r_3^2}.$$

Az ábráról leolvasható, hogy

$$AD = AB + CD + BC = 2 \cdot AB + BC,$$

ezért

$$\frac{AD}{BC} = 2 \cdot \frac{AB}{BC} + 1,$$



amiből

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}\left(\frac{AD}{BC} - 1\right),$$

és (1)-et figyelembe véve:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2(r_2^2 - r_3^2)}.$$

Most már kiszámítható az $\dfrac{AC}{AB}$ arány:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB} = 1 + \frac{1}{\dfrac{AB}{BC}} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2}{r_1^2 + r_3^2 - r_2^2 - r_4^2}.$$

Ez az arány megszerkeszthető. A kifejezésnek ebben az alakjában:

$$\frac{(\sqrt{r_1^2 + r_2^2})^2 - (\sqrt{r_3^2 + r_4^2})^2}{(\sqrt{r_1^2 + r_3^2})^2 - (\sqrt{r_2^2 + r_4^2})^2}$$

a négyzetgyökök Pitagorasz-tétele alapján szerkeszthető szakaszok, jelöljük ezeket rendre R_1, R_2, R_3, illetve R_4-gyel. Így a kifejezést ilyen alakban is felírhatjuk:

$$\frac{(R_1 + R_2)(R_1 - R_2)}{(R_2 + R_4)(R_2 - R_4)} = \frac{\dfrac{(R_1 + R_2)(R_1 - R_2)}{R_3 + R_4}}{R_3 - R_4}.$$

A számláló negyedik arányos szerkesztéssel nyerhető szakasz, tehát $\frac{AC}{AB}$ arányt két szerkeszthető szakasszal állítottuk elő. Ezután a szelő már egyszerűen megszerkeszthető: a k_1 körön felveszünk egy tetszőleges A pontot, és ebből a pontból

k_2-t $\dfrac{AC}{AB}$ arányban megnagyítjuk. Az így kapott k_2' kör k_3-ból kimetszi a C pontot, és ezt összekötve az A ponttal megkapjuk a keresett szelőt.

A trapéz szerkesztése ezután könnyen elvégezhető: az átlókkal és a két szárral rajzolt körökre alkalmazva a leírt eljárást, megkapjuk az AB egyenesét, és mivel az $ADC_\triangle$ három oldalát most már ismerjük, ez és az $AFCD$ négyszög, majd a trapéz is egyszerűen megszerkeszthető. (Ezzel találtunk szerkesztési eljárást, de a bizonyítás és a diszkusszió hosszadalmasnak látszik.)

Horváth Lajosné, Csurgó és Kőváry Károly, Budapest