5. feladat

Egy 2014 oldalú szabályos sokszög csúcsai valamilyen sorrendben P_1, $P_2, \ldots, P_{2014}$. Bizonyítsuk be, hogy a P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{2013}P_{2014}$, $P_{2014}P_1$ egyenesek között van két párhuzamos.

Első megoldás: Számozzuk meg a szabályos sokszög csúcsait pozitív körüljárás szerint az $1, 2, \ldots, 2014$ számokkal. Legyen a P_i csúcshoz írt szám a_i. A P_iP_{i+1} és a P_jP_{j+1} egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha $a_i + a_{i+1}$ és $a_j + a_{j+1}$ vagy megegyezik, vagy pontosan 2014-gyel tér el egymástól. (2 pont)

Indirekt módon tegyük fel, hogy az adott egyenesek között nincs két párhuzamos, ekkor ezek a páronkénti összegek minden 2014-es maradékot pontosan egyszer adnak ki. (1 pont)

Tekintsük most az

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2013} + a_{2014}) + (a_{2014} + a_1)$$

összeget. Mivel az $a_1, \ldots, a_{2014}$ számok pontosan az $1, \ldots, 2014$ számokkal egyeznek meg, ez az összeg $2014 \cdot 2015$, tehát osztható 2014-gyel. Másrészt az egyes zárójelekben szereplő összegek mind különböző maradékot adnak 2014-gyel osztva, ezért az összeg 2014-es maradéka egyenlő

$$0 + 1 + \ldots + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2014 \cdot 1006 + 1007$$

2014-es maradékával, vagyis nem nulla. A kapott ellentmondás igazolja az indirekt feltevés lehetetlenségét. (4 pont)

Második megoldás: Egy szabályos n oldalú sokszög oldalai és átlói pontosan n különböző irányt (párhuzamossági osztályt) határoznak meg. (2 pont)

Ezért ha – indirekt feltevéssel – a kérdéses egyenesek között nincs két párhuzamos, mind a 2014 lehetséges iránynak pontosan egyszer kell szerepelnie. (1 pont)

Számozzuk meg a szabályos sokszög csúcsait körüljárás szerint az 1-től 2014-ig terjedő egész számokkal. A sokszög átlóit és oldalait aszerint nevezzük párosnak, illetve páratlannak, hogy a két végpontjának a sorszáma páros vagy páratlan számban tér el egymástól. (Például az oldalak így mindannyian páratlanok.) Ha két átló vagy oldal párhuzamos, akkor a paritása azonos. Ezért beszélhetünk az irányaik paritásáról. (1 pont)

Tekintsük az egyik olyan szabályos 1007-szöget, amelyet minden második csúcs kiválasztásával kapunk. Ennek az 1007-szögnek az oldal- és átlóirányai az eredeti sokszög oldal- és átlóirányai közül pontosan a párosak, ezért páros irányból 1007 van. Következésképpen ugyancsak 1007 páratlan irány van. (1 pont)

Ezért a megadott egyenesek között is pontosan 1007 páratlan irányú kell legyen. Ugyanakkor a páratlan irányú egyenesek száma ennek ellentmondva páros, hiszen ahányszor a $P_1, P_2, \ldots$ ciklikus sorrend átvált párosról páratlanra, ugyanannyiszor kell páratlanról párosra váltania. (2 pont)