3. feladat

A $p < q$ páratlan prímek az $n!$ prímtényezős felbontásában azonos kitevőn szerepelnek. Igazoljuk, hogy ekkor $n < p(p+1)/2$.

Megoldás: A p prímszám kitevője az $n!$ felbontásában

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots\,,$$

ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelöli, és az összegzést addig kell folytatni, amíg az egészrész nulla nem lesz. (2 pont)

A feltevés szerint $p < q$, így minden i kitevőre

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] \geq \left[\frac{n}{q^i}\right].$$

Ezért p és q kitevője csak úgy egyezhet meg, ha minden $i \geq 1$-re

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = \left[\frac{n}{q^i}\right]$$

teljesül. (1 pont)

Jelölje k az $[n/p]$ és $[n/q]$ közös értékét, ekkor tehát

$$kp \leq n < (k+1)p \quad \text{és} \quad kq \leq n$$

érvényes. (1 pont)

Mivel $p < q$ páratlan prímek, azért $p + 2 \leq q$. Emiatt a fenti egyenlőtlenségekből

$$k(p+2) \leq kq \leq n < (k+1)p\,,$$

majd ebből $2k < p$, azaz $2k \leq p - 1$ következik. (2 pont)

Ezeket felhasználva valóban $2n < (2k+2)p \leq (p+1)p$, amit bizonyítani akartunk. (1 pont)