5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2, \quad \sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

Megoldás: Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + \cos^2 y = 1$, ezért a kitűzött egyenletek összegéből a következőt kapjuk:

$$x^2 + y^2 = 2 \tag{1}$$

1 pont

A feladatban szereplő egyenletek megfelelő oldalainak a különbségét vizsgáljuk és felhasználjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ és $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Ekkor

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y = y^2 - x^2,$$

amiből a következőt kapjuk:

$$2\sin^2 x + x^2 = 2\sin^2 y + y^2 \tag{2}$$

1 pont

Az (1)-es egyenletből következik, hogy x és y is a $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ intervallumban van. (Ugyanezt megkaphatjuk közvetlenül a kiindulási egyenletekből is, hiszen $-1 \leq \sin x \leq 1$ és $-1 \leq \cos x \leq 1$.) 1 pont

Ha x és y kielégítik (1)-et, akkor az abszolút értékük is megoldás. Ugyanez igaz a (2) egyenletre is, mivel a változók második hatványon szerepelnek, illetve a szinusz függvény páratlan és az is a négyzeten szerepel. 1 pont

Használjuk ki, hogy $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, a $2\sin^2 x$ és x^2 függvény egyaránt szigorúan monoton növő a $[0; \sqrt{2}]$ intervallumon, tehát az összegük is. 1 pont

Tehát (1) és (2) csak akkor teljesülhet, ha $|x| = |y|$. 1 pont

Ezt (1)-gyel összevetve a következő négy $(x; y)$ megoldáspárt kapjuk:

$$(1; 1) \quad (1; -1) \quad (-1; 1) \quad (-1; -1).$$ 1 pont

Összesen 7 pont