3. Legyen $a_1 = 1$, a sorozat további elemeit a következő összefüggés határozza meg:

$$a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1} - 1), \quad n \text{ pozitív egész}$$

Igazoljuk, hogy a sorozat első 2025 darab tagjának szorzata nagyobb, mint 2^{2014}.

Megoldás: A képzési szabály alapján a sorozat első néhány eleme:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{6}{4}, \quad a_4 = \frac{8}{5}, \quad a_5 = \frac{10}{6}, \quad ...$$ 1 pont

A sorozat első tagjait tekintve kialakulhat a sejtés, hogy $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. 1 pont

Kezdő lépés: ha $n = 1$, akkor a definíció alapján $a_1 = 1$ és valóban $\frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1$. 1 pont

Indukciós lépés: feltesszük, hogy az állítás igaz n-re és ennek segítségével bebizonyítjuk $n+1$-re. Az alábbi számolásban először a_{n+1}-et kifejezzük a feladatban megadott rekurzív összefüggés segítségével, alkalmazzuk az indukciós feltevést, majd kiszámoljuk a_{n+1}-et és megkapjuk a bizonyítandót.

$$a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n} = \frac{4}{4 - \frac{2n}{n+1}} = \frac{4}{\frac{4n+4-2n}{n+1}} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$ 2 pont

A sorozat első 2025 tagjának szorzata így könnyen számolható:

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4}{5} \cdot \frac{2 \cdot 5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2 \cdot 2025}{2026} = \frac{2^{2025}}{2026}$$ 1 pont

Most igazoljuk, hogy ez nagyobb, mint 2^{2014}:

$$\frac{2^{2025}}{2026} = 2^{2014} \cdot \frac{2^{11}}{2026} = 2^{2014} \cdot \frac{2048}{2026} > 2^{2014}$$ 1 pont

Összesen 7 pont