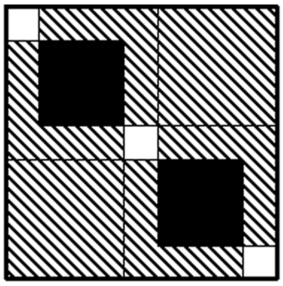

5. feladat: Papírból 6 darab a cm oldalhosszúságú négyzetet vágtunk ki, majd azokból egy-egy L-alakot raktunk le a b cm oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallap két szemközti csúcsánál az ábra szerint. (A hatoldalú L-alak kettő oldala $2a$, négy oldala pedig a hosszúságú.) Így az asztallap két feketével jelölt része kétszer, a csíkozással jelölt része pedig egyszer fedett. A nem fedett részek területének összege, a kétszer fedett (fekete) részek területének összege és az egyszer fedett (csíkozott) részek területének összege cm^2-ben mérve, ebben a sorrendben egy pozitív tagokból álló, monoton növő számtani sorozat egymást közvetlenül követő tagjai. (Az ábra nem méretarányos.) Határozza meg a b és a oldalak arányának pontos értékét!

I. Megoldás: A nem fedett (fehér) négyszögek bármely oldala vagy valamely a oldalhosszúságú négyzet egyik oldalára, vagy a b oldalú négyzet egyik oldalára illeszkedik, ezért ezek szemközti oldalai párhuzamosak, szögei $90°$-osak, valamint bármely oldaluk hossza $b-2a$, így ezek olyan négyzetek, amelyeknek területe $(b-2a)^2$. (1 pont)
Így a nem fedett részek területének összege:

$$3 \cdot (b-2a)^2 = 3b^2 - 12ab + 12a^2. \quad \text{(1 pont)}$$

Hasonlóan a feketével jelölt négyszögek is négyzetek, oldalaik hossza pedig $a-(b-2a) = 3a-b$. (1 pont)
Így a kétszer fedett (fekete) részek területének összege:

$$2 \cdot (3a-b)^2 = 18a^2 - 12ab + 2b^2. \quad \text{(1 pont)}$$

Az egyszer fedett (csíkos) részek területének összege:

$$b^2 - (3b^2 - 12ab + 12a^2) - (18a^2 - 12ab + 2b^2) = -30a^2 + 24ab - 4b^2. \quad \text{(1 pont)}$$

A három terület mérőszáma egy monoton növő számtani sorozat egymást közvetlen követő eleme, ezért:

$$18a^2 - 12ab + 2b^2 - (3b^2 - 12ab + 12a^2) = -30a^2 + 24ab - 4b^2 - (18a^2 - 12ab + 2b^2), \quad \text{(1 pont)}$$

$$6a^2 - b^2 = -48a^2 + 36ab - 6b^2,$$

$$5b^2 - 36ab + 54a^2 = 0,$$

$$5 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 36 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) + 54 = 0,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 4 \cdot 5 \cdot 54}}{10} = \frac{18 \pm 3\sqrt{6}}{5}. \quad \text{(1 pont)}$$

Ha $b \geq 3a$ akkor nincs kétszer fedett (fekete) rész, ezért $\frac{b}{a} < 3$. (1 pont)
Ha $b \leq 2a$ akkor nincs nem fedett rész, sőt az a oldalú négyzetek egy része még le is lóghat az asztalról. Tehát $2 < \frac{b}{a} < 3$. Ezekből következik, hogy $\frac{18+3\sqrt{6}}{5} > \frac{18}{5} > 3$ nem megoldás.
Mivel

$$2 < \frac{10,5}{5} = \frac{18 - 3 \cdot 2,5}{5} < \frac{18 - 3\sqrt{6}}{5} < \frac{18 - 3 \cdot 2,4}{5} = \frac{10,8}{5} < 3,$$

ezért a keresett pontos érték: (1 pont)

$$\frac{18-3\sqrt{6}}{5}.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Ha a feladatban szereplő alakzatok méretét kétszeresére növeljük, akkor a négyzetek oldalai is kétszeresek lesznek, míg a területek négyszeresre változnak. A területek különbsége is négyszeres lesz. A számtani sorozat tulajdonságuk is megmarad, hiszen a különbségük is négyszeresre növekszik. Ugyanígy igaz lenne, ha tetszőlegesen nagyítanánk vagy kicsinyítenénk. Tehát vegyük azt az esetet, amikor a kicsi négyzetek (a oldalú négyzetek) éppen egységnyiek, a nagy négyzet (b oldalú) mérete pedig legyen x. A feladat ezen x értékének a meghatározása, hiszen ez éppen a keresett arány. (1 pont)
A nem fedett (fehér) négyszögek bármely oldala $x-2$ nagyságú. Ebből következik az $x>2$ egyenlőtlenség, másrészt a területe $(x-2)^2$. (1 pont)
Így a nem fedett részek területének összege:

$$3\cdot(x-2)^2$$ (1 pont)

Hasonlóan a feketével jelölt négyszögek is négyzetek, oldalaik hossza pedig $1-(x-2)=3-x$. Ebből következik x-re egy újabb feltétel: $3>x$. (1 pont)

Így a kétszer fedett (fekete) részek területének összege:

$$2\cdot(3-x)^2$$ (1 pont)

Az egyszer fedett (csíkos) részek területének összege:

$$x^2-2\cdot(3-x)^2-3\cdot(x-2)^2.$$ (1 pont)

A három terület mérőszáma egy monoton növő számtani sorozat egymást közvetlen követő eleme, ezért:

$$4\cdot(3-x)^2=x^2-2\cdot(3-x)^2-3\cdot(x-2)^2+3\cdot(x-2)^2$$ (1 pont)

$$4x^2-24x+36=-x^2+12x-18$$
$$5x^2-36x+54=0$$
$$x_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{1296-4\cdot5\cdot54}}{10}=\frac{18\pm3\sqrt{6}}{5}.$$ (1 pont)

Mivel $2<x<3$, ezért a kapott két gyök közül csak a

$$\frac{18-3\sqrt{6}}{5}.$$

felel meg. (1 pont)
A keresett pontos érték:

$$\frac{18-3\sqrt{6}}{5}.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont