3. feladat: Egy négyzetes oszlop alapélének és magasságának számértéke egész. A négyzetes oszlop V térfogatának és A felszínének mérőszámai között fennáll a $V = 2015 \cdot A$ összefüggés. Hány olyan, nem egybevágó négyzetes oszlop létezik, amely megfelel ezeknek a feltételeknek?

I. Megoldás: Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, magassága b. A feladatban szereplő feltételek szerint a és b pozitív egész számok. A szokásos jelölésekkel

$$V = a^2b, \text{ továbbá } A = 2a^2 + 4ab.$$

Így

$$a^2b = 2015 \cdot (2a^2 + 4ab).$$ (2 pont)

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát az a pozitív egésszel, majd a jobb oldal nullára rendezését követően alakítsuk az egyenlet bal oldalát szorzattá:

$$a \cdot b - 2 \cdot 2015 \cdot a - 4 \cdot 2015 \cdot b = 0,$$ (1 pont)

$$a \cdot b - 2 \cdot 2015 \cdot a - 4 \cdot 2015 \cdot b + 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015 = 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015,$$
$$(a - 4 \cdot 2015)(b - 2 \cdot 2015) = 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015.$$ (2 pont)

A jobb oldalon álló pozitív egész szám bármelyik pozitív osztójához párosítva az osztópárját az egyenlet egy helyes megoldásához jutunk. Amennyiben $k \cdot n = 2 \cdot 2015 \cdot 4 \cdot 2015$ és $k, n < 0$ negatív osztópár, akkor a $k = -4 \cdot 2015, n = -2 \cdot 2015$ párhoz az $a = 0, b = 0$ tartozna, míg a további negatív párok esetében az egyik tényező abszolút értéke mindenképpen nagyobb lesz, mint a megfelelő $a - 4 \cdot 2015$, vagy $b - 2 \cdot 2015$ abszolút értéke, így ezekben a további esetekben a és b közül az egyik negatív egész lenne. (1 pont)
Elegendő tehát a pozitív osztópárokra szorítkoznunk. Mivel nem szimmetrikus a két tényező, így minden osztóra különböző megoldást kapunk. (1 pont)
Pontosan annyi megoldása lesz az egyenletnek, ahány osztója van a $2^3 \cdot 2015^2$ számnak. (1 pont)
A pozitív osztók száma

$$d(2^3 \cdot 2015^2) = d(2^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108.$$ (1 pont)

Tehát 108 különböző ilyen tulajdonságú négyzetes oszlop van. (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, magassága b. A feladatban szereplő feltételek szerint a és b pozitív egész számok. A szokásos jelölésekkel

$$V = a^2 b, \text{ továbbá } A = 2a^2 + 4ab.$$

Így

$$a^2 b = 2015 \cdot (2a^2 + 4ab). \qquad \text{(2 pont)}$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát az a pozitív egésszel, a művelet elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$a\ (b - 2 \cdot 2015) = 4 \cdot 2015 \cdot b \qquad \text{(1 pont)}$$

A jobb oldal pozitív, tehát a bal oldal is. Az a pozitív, mert élhossz, tehát a $b - 2 \cdot 2015$ kifejezés is, tehát oszthatunk vele. (1 pont)

Az a-t kifejezve:

$$a = \frac{4 \cdot 2015 \cdot b}{b - 2 \cdot 2015} \qquad \text{(1 pont)}$$

Tovább alakítva a törtet

$$a = \frac{4 \cdot 2015 \cdot (b - 2 \cdot 2015) + 2^3 \cdot 2015^2}{b - 2 \cdot 2015} = 4 \cdot 2015 + \frac{2^3 \cdot 2015^2}{b - 2 \cdot 2015}$$

Az előzőek szerint a nevező (a $b - 2 \cdot 2015$ kifejezés) a számláló pozitív osztója kell legyen. (2 pont)

Pontosan annyi megoldása lesz az egyenletnek, ahány pozitív osztója van a $2^3 \cdot 2015^2$ számnak. (1 pont)

A pozitív osztók száma

$$d(2^3 \cdot 2015^2) = d(2^3 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát 108 különböző ilyen tulajdonságú négyzetes oszlop van. (1 pont)

Összesen: 10 pont