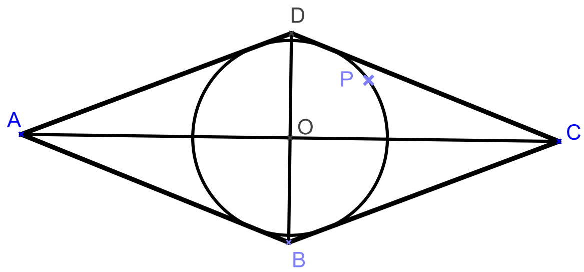
2. feladat: Az $ABCD$ rombusz hegyesszöge $45°$. Mutassa meg, hogy a rombusz beírt körének tetszőleges P pontjára teljesül

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \frac{5}{2}AB^2.$$

I. Megoldás: A megoldás során többször felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével (Geometria FGY I. 1671. feladat). Ennek következménye, hogy a háromszög súlyvonala kifejezhető az oldalak hosszának segítségével. (1 pont)



(1 pont)

Legyen O a beírt kör középpontja. Ekkor PO az APC háromszög súlyvonala, ezért

$$PO^2 = \frac{PA^2 + PC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}.$$ (1 pont)

Hasonló meggondolással a BPD háromszögből kapjuk, hogy

$$PO^2 = \frac{PB^2 + PD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}.$$ (1 pont)

Ha összeadjuk a két egyenletet és szorozzuk mindkét oldalt 2-vel, akkor rendezés után

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4 \cdot PO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2}.$$ (1 pont)

Az AC és BD a rombusz átlói, így a paralelogramma-tétel alapján

$$AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AB^2.$$ (1 pont)

Másrészt a rombusz magassága $2 \cdot PO$, hegyesszöge $45°$, tehát

$$2 \cdot PO = \frac{\sqrt{2}}{2}AB, \text{ vagyis } 4 \cdot PO^2 = \frac{1}{2}AB^2.$$ (2 pont)

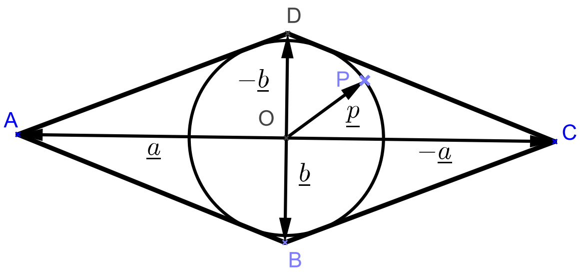
Ezeket felhasználva

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4 \cdot PO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2} = 4 \cdot PO^2 + 2 \cdot AB^2 =$$

$$= \frac{1}{2}AB^2 + 2 \cdot AB^2 = \frac{5}{2}AB^2.$$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás: Irányítsunk vektorokat az O pontból a rombusz csúcsaiba és a P pontba az ábra szerint. Legyen $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ és $\overrightarrow{OP} = \underline{p}$. A rombusz átlói felezik egymást, így $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = -\underline{a}$ továbbá $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} = -\underline{b}$. (1 pont)



A PA, PB, PC, PD szakaszok hosszának négyzete a $(\underline{p}-\underline{a})$, $(\underline{p}-\underline{b})$, $(\underline{p}-\underline{c})$, $(\underline{p}-\underline{d})$ vektor önmagával vett skaláris szorzata, emiatt (1 pont)

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (\underline{p}-\underline{a})^2 + (\underline{p}-\underline{b})^2 + (\underline{p}+\underline{a})^2 + (\underline{p}+\underline{b})^2 = 4\underline{p}^2 + 2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2. \quad \text{(2 pont)}$$

Ebből egyrészt a Pitagorasz-tétel alapján

$$2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2 = 2 \cdot AB^2, \quad \text{(2 pont)}$$

másrészt az első megoldásban szereplő gondolattal a rombusz magassága $2 \cdot PO$, hegyesszöge $45°$, tehát (1 pont)

$$2 \cdot PO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB, \text{ vagyis } 4 \cdot \underline{p}^2 = \frac{1}{2} AB^2. \quad \text{(2 pont)}$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2 \cdot AB^2 + \frac{1}{2} AB^2 = \frac{5}{2} AB^2. \quad \text{(1 pont)}$$

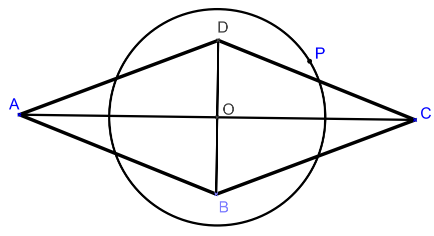
Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

1. A rombusz középpontja körül rajzolt R sugarú kör tetszőleges P pontjára állandó lesz a

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

kifejezés értéke.



2. A feladat állítása általánosabban is igaz. Egy tetszőleges n-szög (n pontból álló pontrendszer) esetén a súlypont, mint középpont körül rajzolt R sugarú kör tetszőleges P pontjának az n-szög csúcsaitól (a pontrendszer pontjaitól) vett távolságainak négyzetösszege nem függ a P pont választásától, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} PA_i^2 = \text{állandó}$$

Az állítás bizonyítása a 2. megoldásban közölthöz hasonló módon végezhető el.