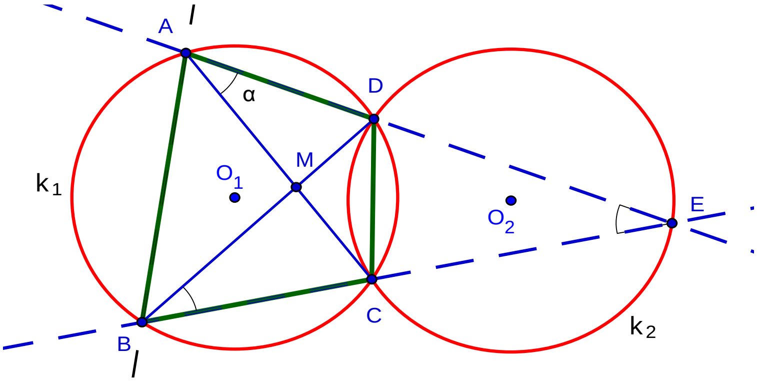
5. Az $ABCD$ húrnégyszög $BC$ és $AD$ oldalainak egyenesei a hegyesszögű $CDE$ háromszöget zárják közre. A $CDE$ háromszög körülírt körének sugara megegyezik az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének sugarával.

Bizonyítsa be, hogy $\frac{AB}{CD} = 2 \cdot \cos(CED\angle)$!

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók.




1 pont

A $k_1$ és $k_2$ körök sugara egyenlő, legyen ez a sugár $R$.

A $k_1$ körben a $CD$ húrhoz az ábra jelölése szerint, $\alpha$ nagyságú kerületi szög tartozik. Egyenlő sugarú körökben az egyenlő hosszúságú húrokhoz egyenlő nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért a $k_2$ körben, amelynek $CD$ ugyancsak húrja, a $CD$ húrhoz szintén $\alpha$ nagyságú kerületi szög tartozik, vagyis

$$CED\angle = \alpha \ .$$

2 pont

A kerületi szögek tétele miatt a $k_1$ körben $CBD\angle = \alpha$, így a $BED$ háromszög egyenlő szárú háromszög, mert a $BE$ alapon fekvő szögei egyenlők. A $BED$ háromszögnek $BDA\angle$ külső szöge, ezért

$$BDA\angle = 2\alpha \ .$$

2 pont

Ismeretes, hogy a kör egy húrjának hossza kifejezhető a kör sugarával és a húrhoz tartozó kerületi szög szinuszával. Eszerint egyrészt a $k_1$ körben $AB = 2R \cdot \sin 2\alpha$, másrészt a $k_2$ körben $CD = 2R \cdot \sin\alpha$.

1 pont

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2R \cdot \sin 2\alpha}{2R \cdot \sin\alpha} \ .$$

2 pont

Felhasználva a $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ trigonometriai azonosságot, egyszerűsítés után (nyilvánvaló, hogy $\sin\alpha \neq 0$), azt kapjuk, hogy

$$\frac{AB}{CD} = 2 \cdot \cos\alpha \ ,$$

2 pont

ez pedig a bizonyítandó állítással.

Összesen: 10 pont