2. Anna és Bori tulipánokat ültetnek egy sorba, n helyre. Ezt a következő játékos formában teszik: felváltva ültetnek egy-egy tulipánt úgy, hogy egymással közvetlenül szomszédos helyekre nem kerülhet tulipán. Anna kezdi a játékot. Az nyer, aki utoljára tud tulipánt ültetni. Kinek van nyerő stratégiája, ha (a) $n = 2013$; (b) $n = 12$?

Megoldás: Képzeljünk minden helyre egy üres virágcserepet, ezek közül amibe ültetünk és szomszédjait mindig kivesszük a sorból. Ha van egymás mellett n cserép, akkor négyféle dolog történhet:

(i) Ha n 1, vagy 2, akkor bármelyiket választva az összes cserepet elvesszük. A továbbiakban $n > 2$.

(ii) A szélső cserépbe ültetve két cserepet veszünk ki a sor széléről.

(iii) A legszélső melletti cserépbe ültetve három cserepet veszünk el.

(iv) Ha $n > 5$, akkor további lehetőség, hogy a sor közepéről kiveszünk három cserepet és a meglevő sort két nemüres külön részre bontjuk. Például 12 cserép esetén ha a negyedikbe ültetünk, akkor marad az elején két cserép, kiveszünk hármat és marad utána még 7 cserép. Jelöljük ezt így $(12) \to (2; 7)$, a zárójelen belül pontosvesszővel elválasztva egymás után írjuk az egymás melletti cserepek számát. Ezzel a lépéssel egy sorból két kisebb keletkezett, ezeket a továbbiakban nevezzük szakaszoknak, az i cserépből álló szakaszok számát jelölje s_i. 1 pont

A feladat (a) részében 2013 hely van, ami páratlan. Ha Anna első lépésében kiválasztja a középsőt, akkor két ugyanakkora rész keletkezik, $(2013) \to (1005; 1005)$. Ha Bori választ egy helyet, akkor Anna mindig a középső helyre szimmetrikusan kiválaszthatja ennek tükörképét és így nyerhet. 2 pont

Ez a szimmetria-stratégia lesz a célunk, azaz olyan helyzet létrehozása, amelyben minden szakasznak van egy ugyanannyi cserépből álló párja. Ha ellenfelünk bármelyikben kiválasztja a k-adik cserepet, mi a másikban választjuk ugyanúgy a k-adikat. Az egy vagy két cserépből álló szakaszok egyformának számítanak, mert mindkettő típus eltűnik, ha belőle választunk. Szimmetria-stratégiához tehát olyan helyzet előállítása a célunk, amelyben $s_1 + s_2$ és s_i is páros (minden $i > 2$ esetén). 2 pont

Megmutatjuk, hogy a (b) részben is Anna tud nyerni. Legyen az első lépés $(12) \to (2; 7)$. Bori minden lehetséges lépésére adunk Anna részéről olyan válaszlépést, amely szimmetria-stratégia miatt Anna győzelmét jelenti:

Bori: $(2; 7) \to (7)$, Anna: $(7) \to (2; 2)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 5)$, Anna: $(2; 5) \to (2; 2)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 4)$, Anna: $(2; 4) \to (2; 2)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 1; 3)$, Anna: $(2; 1; 3) \to (2; 1)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 2; 2)$, Anna: $(2; 2; 2) \to (2; 2)$. 2 pont

Összesen: 7 pont