5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\mathrm{tg}^2 x - 3} > 1 + 2 \cdot \mathrm{tg}\, x$$

Megoldás: A gyökjel alatti kifejezés nem lehet negatív, tehát $\mathrm{tg}^2 x - 3 \geq 0$, azaz (i) $\mathrm{tg} x \leq -\sqrt{3}$, vagy (ii) $\mathrm{tg} x \geq \sqrt{3}$. 2 pont

Az (i) esetben a bal oldalon álló gyökös kifejezés értéke legalább 0, míg a jobb oldal legfeljebb $1 - 2 \cdot \sqrt{3}$. Ebben az esetben az egyenlőtlenség teljesül, a megfelelő x értékek

$$-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x \leq -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

3 pont

Az (ii) esetben az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, négyzetre emelhetünk:

$$\mathrm{tg}^2 x - 3 > 1 + 4 \cdot \mathrm{tg}\, x + 4 \cdot \mathrm{tg}^2 x$$

Mivel $\mathrm{tg} x > 0$, ezért a bal oldal kisebb, mint $\mathrm{tg}^2 x$, a jobb oldal pedig nagyobb, ezért az egyenlőtlenség itt nem teljesülhet. 2 pont

Összesen: 7 pont