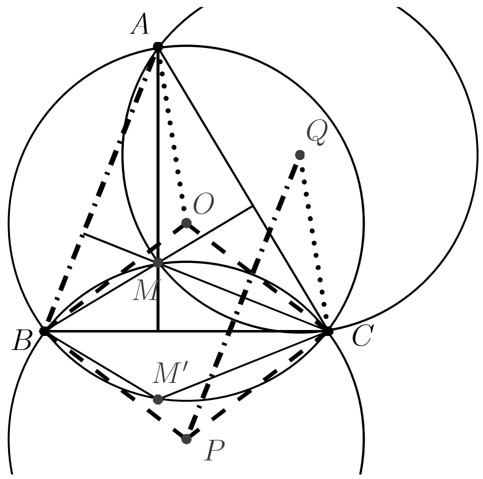
4. Jelölje M a hegyesszögű ABC háromszög magasságpontját. Legyen P, Q és R rendre a BCM, CAM és ABM háromszögek köré írt köreinek középpontja.

(a) Igazoljuk, hogy ABC és PQR egybevágó háromszögek.

(b) Igazoljuk, hogy az AP, BQ és CR egyenesek egy pontra illeszkednek.

Megoldás: (a) A BM egyenes a háromszög magasságvonala, tehát merőleges az AC oldalra, ezért $CBM\angle = 90° - \gamma$. Hasonlóan adódik, hogy $BCM\angle = 90° - \beta$. A BMC háromszögben ezek alapján $BMC\angle = 180° - \alpha$. Tükrözzük az M pontot a BC oldalra, így kapjuk az M' pontot, amelyre $BM'C\angle = BMC\angle = 180° - \alpha$. Az $ABM'C$ tehát húrnégyszög, mivel szemközti szögeinek összege 180°. 1 pont

Az imént beláttuk, hogy a háromszög magasságpontját a háromszög egy oldalára tükrözve a tükörkép a köré írt körre esik. Ez megfordítva azt jelenti, hogy a köré írt kört a háromszög oldalára tükrözve, a kör tükörképe átmegy az M ponton. Ezek szerint a feladatban szereplő P, Q és R pontokat úgy kaphatjuk, hogy az ABC háromszög köré írt körének O középpontját tükrözzük rendre a BC, CA és AB oldalakra. 1 pont



Mivel O tükörképe BC-re P és $BO = CO$, ezért $BOCP$ rombusz, azaz PC párhuzamos és egyenlő BO-val. Ugyanígy igaz, hogy CQ és OA párhuzamos és egyenlő. Ezek szerint a BOA és PCQ háromszögek egybevágóak, amiből következik, hogy BA és PQ (i) párhuzamos és (ii) egyenlő.

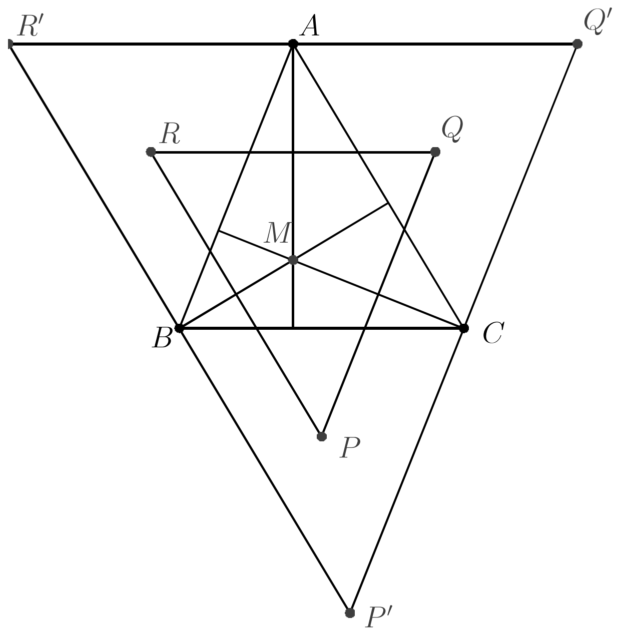
Az (ii) tulajdonságból adódik, hogy ABC és PQR egybevágóak, hiszen a BA, PQ párnál látott módon igazolható, hogy oldalaik páronként egyenlő hosszúságúak. 2 pont

Az (a) rész bizonyításának utóbbi 2 pontjához egy másik érvelés: O tükörképe a háromszög oldalaira P, Q és R. E tükörképeket azonban úgy is megkaphatjuk, hogy az O pontnak az oldalakon levő vetületeit (azaz az oldalfelező pontokat) O közepű 2 arányú hasonlósággal visszük a P, Q és R pontokba. Ám az oldalfelezők egy, az eredetihez hasonló, fele akkora háromszög csúcsai, tehát PQR egybevágó ABC-vel.

(b) Az (a) részben kiderült, hogy BA és PQ párhuzamos és egyenlő, így az $ABPQ$ négyszög paralelogramma, ennek átlói felezik egymást. Ezek szerint AP felezőpontján átmegy BQ. Logikai szimmetria miatt ugyanez elmondható az AP, BQ és CR szakaszok közül választható tetszőleges pár esetén. A három szakasz tehát egy ponton megy át, és ez a pont felezi mind a három szakaszt. 3 pont

Összesen: 7 pont

2. Megoldás: (a) A háromszög köré írt körének középpontja rajta van minden oldalának a felező merőlegesén. Ezek szerint az MC szakasz felező merőlegesén van a P és Q pont. Nagyítsuk a PQR háromszöget az M pontból kétszeresre, így kapjuk a $P'Q'R'$ háromszöget. Ekkor $P'Q'$ átmegy a C ponton, továbbá mivel PQ merőleges az MC-re, azaz PQ és AB párhuzamosak, továbbá PQ és $P'Q'$ a nagyításból adódóan párhuzamosak, ezért $P'Q'$ párhuzamos AB-vel. Ugyanilyen érveléssel adódik, hogy $Q'R'$ átmegy A-n és párhuzamos BC-vel, továbbá $R'P'$ átmegy B-n és párhuzamos AC-vel. 2 pont



Most az ABC háromszög S súlypontját válasszuk középpontnak és végezzünk $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot, ez a $P'Q'R'$ háromszög oldalait az ABC megfelelő oldalaiba viszi, így a $P'Q'R'$ háromszög képe éppen az ABC lesz. Két középpontos hasonlóságot végeztünk, az elsőben 2, a másodikban $-\frac{1}{2}$ volt az arány. Mivel ezek szorzata -1, ezért a kiindulási PQR háromszöget középpontos tükrözés viszi az ABC háromszögbe, így azok egybevágóak. 2 pont

(b) Beláttuk, hogy PQR háromszöget középpontos tükrözés viszi az ABC háromszögbe. A transzformáció szerinti megfelelő pontokat összekötő egyenesek áthaladnak a középpontos tükrözés centrumán, tehát PA, QB és RC egy ponton haladnak át. Most is megkaptuk, hogy a közös pont éppen felezi ezeket a szakaszokat. 3 pont

Megjegyzés: A feladat nagyon sokféleképpen megoldható. Más, helyes megoldás esetén is a pontozás során az (a) rész 4, a (b) rész 3 pontot ér.