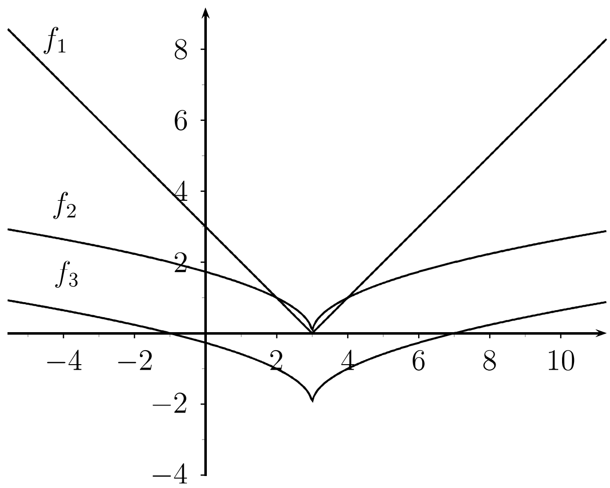
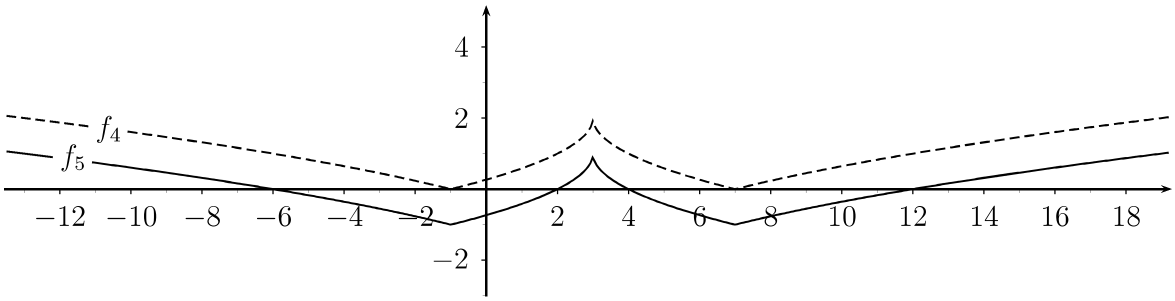
2. Határozzuk meg, a $p$ valós paraméter mely értékeinél hány megoldása van a következő egyenletnek:

$$|\sqrt{|x-3|}-2|-1=p$$

**Megoldás:** A bal oldalt ábrázoljuk, mint az $x$ változó függvényét. A különböző műveletek elvégzése során nyomon követjük a függvény transzformációit. Legyen $f_1 = |x-3|$, véve ennek gyökét kapjuk az $f_2 = \sqrt{|x-3|}$ függvényt. Ebből kettőt levonva a grafikon az $y$ tengellyel párhuzamosan 2 egységnyivel negatív irányba mozdul, így kapjuk $f_3 = \sqrt{|x-3|}-2$-t. 2 pont




Mivel $f_4 = |f_3|$, ezért $f_4$ grafikonját úgy kapjuk, hogy az $f_3$ függvény grafikonjának $x$ tengely alatti részét tükrözzük az $x$ tengelyre. Ebből 1-et kivonva, azaz $f_4$ szaggatottal jelölt grafikonját $y$ tengellyel párhuzamosan negatív irányba 1-gyel elmozdítva kapjuk a kiinduló egyenlet bal oldalán álló $f_5 = |\sqrt{|x-3|}-2|-1$ függvény grafikonját. 2 pont




A feladatban kitűzött egyenlet jobb oldalán a $p$ konstans van egyedül. Ha ezt, mint függvényt ábrázoljuk, akkor grafikonja az $y = p$ egyenletű egyenes, amely az $x$ tengellyel párhuzamos. A megoldások számát tehát az dönti el, hogy az $f_5$ függvény grafikonjának hány közös pontja van az $y = p$ egyenletű egyenessel. 1 pont

Mivel az $f_4$ függvény értékkészlete a $[0; \infty)$, ezért az $f_5$ értékkészlete $[-1; \infty)$. Ha tehát $p < -1$, az egyenletnek nincs megoldása. Ha $p = -1$, akkor az egyenletnek két megoldása van.

$f_3$-nak az $x = 3$-nál van a minimuma és itt értéke -2. Így $f_4$ értéke $x = 3$-nál 2, tehát $f_5$ értéke $x = 3$-nál 1. Ha tehát $-1 < p < 1$ akkor az egyenletnek négy megoldása van. Ha $p = 1$, akkor a megoldások száma három, végül $1 < p$ esetén két megoldás van. Összefoglalva:

| p értéke | $p < -1$ | $p = -1$ | $-1 < p < 1$ | $p = 1$ | $1 < p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| megoldások száma | 0 | 2 | 4 | 3 | 2 |

2 pont

**Összesen: 7 pont**

**2. Megoldás:** A feladat megoldását algebrai úton is nyomon követhetjük. Rendezés után

$$|\sqrt{|x-3|} - 2| = p + 1$$

tehát $p + 1 \geq 0$, különben nincs megoldás. 1 pont

Az abszolútérték "feloldása" következik:

(i) ha $\sqrt{|x-3|} - 2 \geq 0$ akkor $\sqrt{|x-3|} - 2 = p + 1$, azaz $\sqrt{|x-3|} = p + 3$;

(ii) ha $\sqrt{|x-3|} - 2 < 0$ akkor $2 - \sqrt{|x-3|} = p + 1$, azaz $\sqrt{|x-3|} = 1 - p$. 2 pont

$p = -1$ esetén (i) és (ii) ugyanazt az egyenletet adja, $\sqrt{|x-3|} = 2$ és ennek két megoldása van. 1 pont

Ha $-1 < p < 1$ akkor (i) és (ii) esetben is két megoldás adódik (négyzetre emelés után az $x - 3$ illetve $3 - x$ hoz egy-egy megoldást.) Ekkor tehát négy megoldás van. 1 pont

Ha $p = 1$ akkor (i) két megoldást ad, (ii) viszont csak egyet, tehát ekkor a megoldások száma három. 1 pont

Ha $p > 1$, akkor (ii) esetben nincs gyök, az (i) eset két gyököt ad, tehát ilyenkor két megoldás van. 1 pont