1. Melyek azok a pozitív p és q prímek, amelyekre a

$$p+q, \quad p+q^2, \quad p+q^3, \quad p+q^4$$

számok mindegyike prím?

Megoldás: A pozitív prímszámok a 2 kivételével mind páratlanok. Ha p és q egyike sem 2, akkor $p+q$ 2-nél nagyobb páros szám, ami nem lehet prím. Nem lehet $p=q=2$ sem, hiszen akkor $p+q=4$, ami nem prím. Tehát p és q közül pontosan az egyik lehet a 2. 3 pont

Legyen először $p=2$. Ha $q=3$, akkor a feladatban szereplő négy további szám az 5, 11, 29 és 83. Ezek mindegyike prím. Ha $q \neq 3$, akkor 3-as maradéka lehet 1. $q=3k+1$ esetén $p+q=2+3k+1=3\cdot(k+1)$, ami 3-mal osztható 3-nál nagyobb szám, azaz nem prím. Amennyiben $q=3k+2$ alakú, akkor $p+q^2=2+9k^2+12k+4=3\cdot(3k^2+4k+2)$, ami ismét 3-nál nagyobb 3-mal osztható szám, ez sem lehet prím. 2 pont

Legyen $q=2$. Ha $p=3$, akkor a feladatban szereplő négy további szám az 5, 7, 11, 19. Ezek mindegyike prím. Ha $p \neq 3$, akkor $p=3k+1$ esetén az előzőek mintájára $p+q$, $p=3k+2$ esetén $p+q^2=3k+2+4=3\cdot(k+2)$ lesz 3-mal osztható 3-nál nagyobb szám, ami nem lehet prím. 2 pont

Azt kaptuk, hogy a feladat feltételeinek két $(p;q)$ számpár felel meg, a $(2;3)$ és a $(3;2)$.

Összesen: 7 pont