Oldja meg a valós számok halmazán a

$$3 \cdot 25^x - 16^x = 2 \cdot 20^x$$

egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

Az egyenlet a hatványozás azonosságainak felhasználásával

(1) $$3 \cdot 5^{2x} - 4^{2x} = 2 \cdot 5^x \cdot 4^x$$

alakba is írható. 1 pont

Az 5^x és 4^x pozitív valós számok, ezért (1) mindkét oldalát oszthatjuk az $5^x \cdot 4^x$ pozitív számmal. 1 pont

Ekkor a műveletek elvégzése, a hatványozás azonosságainak újbóli alkalmazása és az egyszerűsítés után a

(2) $$3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x - \left(\frac{4}{5}\right)^x = 2$$

egyenletet kapjuk. 1 pont

Vezessük be az

$$y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$$

jelölést, ezzel a jelöléssel a (2) egyenletből

$$3 \cdot y - \frac{1}{y} = 2$$

adódik, ebből pedig a műveletek elvégzésével és rendezéssel:

(3) $$3y^2 - 2y - 1 = 0.$$ 2 pont

A (3) másodfokú egyenlet megoldásai az

$$y_1 = 1 \text{ és } y_2 = -\frac{1}{3}$$

valós számok. 1 pont

Az $y_2 = -\frac{1}{3}$ nem megoldás, mert pozitív szám. 1 pont

Ha $y_1 = 1$, akkor

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1,$$

azaz

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x} = \left(\frac{5}{4}\right)^{0}.$$ 1 pont

Mivel az $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ebből

$$x = 0$$

következik.

Az eredeti egyenlet egyetlen megoldása tehát az $x = 0$ valós szám. 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldás $(3 \cdot 1 - 1 = 2 \cdot 1)$. 1 pont

Összesen: 10 pont