

5. a) Seholsincs országban 5 város van. Az országban háromféle közlekedési eszközzel lehet utazni, busszal, vonattal és repülővel. Bármely két város között pontosan egy közlekedési eszköz használható közvetlenül. Igaz-e, hogy mindenképp kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz úgy, hogy az egyik városból a másik nem elérhető, még átszállásokkal sem, ha csak a kiválasztott eszközt használjuk?

b) Mi volna a helyzet 6 város esetén?

Megoldás. a) Igen, mindig kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz a kívánt módon.

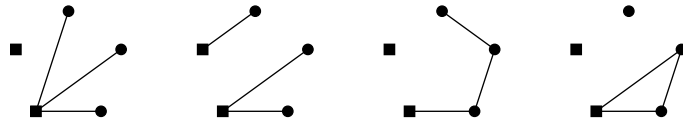
Összesen $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ közlekedési útvonal van.

1 pont

Ha minden közlekedési eszközt legalább négy útvonalon használnánk, akkor az útvonalak száma legalább $3 \cdot 4 = 12$ lenne. Ez több, mint 10, tehát van olyan eszköz, amit legfeljebb 3 útvonalon használhatunk.

1 pont

Megmutatjuk, hogy még 3 útvonal esetén is van két város, amik között ezen eszközzel nem lehet utazni. A 3 út csak 4 lényegesen különböző módon helyezkedhet el és könnyen látszik, hogy egyik sem megfelelő. Például a négyzettel jelölt városok között nincs lehetőség utazásra.



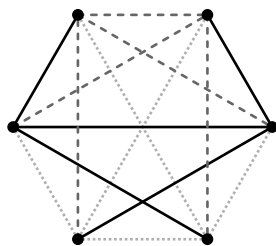
2 pont

Egy másik mód ezen rész megmutatására: Gondoljunk arra, hogy egyesével felépítjük a három útvonalat. Kezdetben öt csoportban vannak a városok úgy, hogy egyikből sem lehet elérni a többi. Ha két csoport közé építünk egy utat, akkor azok összeolvadnak, és a csoporton belül elérhetővé válnak a városok. Mivel csak három utat építünk föl, a végén még mindig van legalább két csoport. Mivel a két csoport között nem vezet út, nem lehet eljutni az egyikből a másikba.

b) 6 város esetén lehetséges, hogy nincs megfelelő választás.

1 pont

A következő ábrán mutatunk egyet a lehetséges ellenpéldák közül. A három szín a három közlekedési eszközt mutatja.



Helyes ellenpélda mutatása.

2 pont

Összesen: 7 pont