4. Adott az $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=k$ egyenlet, ahol k rögzített valós szám. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek minden valós k-ra van megoldása, és az egyik megoldás mindig 1 és 2 közé esik!

Megoldás. Az egyenlete alaphalmaza: $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ $(x\neq 1;2)$. 1 pont

Ha $k=0$, akkor az egyenlet az $x-1=-(x-2)$ elsőfokú egyenletre vezet, ennek megoldása $x=\frac{3}{2}$, megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Ha $k\neq 0$, akkor az $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ halmazon az eredeti egyenlet ekvivalens a

$$kx^2-x(3k+2)+2k+3=0$$

másodfokú egyenlettel. 1 pont

Ennek diszkriminánsa k^2+4 minden valós k esetén nagyobb 0-nál, így az egyenletnek mindig van megoldása. 1 pont

A másodfokú kifejezés értéke $x=1$ esetén minden k-ra $+1$, $x=2$ esetén -1, így az alaphalmazon kívüli 1 és 2 soha nem gyöke az egyenletnek. 1 pont

A másodfokú függvény folytonossága miatt viszont $+1$ és -1 között fel kell vennie a függvénynek a 0-t is. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek biztosan van gyöke az $]1;2[$-ben. 1 pont

---

Összesen: 7 pont