4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_7$ nemnegatív számok összege 1. Tekintsük az alábbi öt mennyiséget: $a_1+a_2+a_3$, $a_2+a_3+a_4$, $a_3+a_4+a_5$, $a_4+a_5+a_6$, $a_5+a_6+a_7$. Jelölje ezen öt érték maximumát M. Mekkora lehet M legkisebb értéke?

1. megoldás. $a_1=a_4=a_7=\frac{1}{3}$, $a_2=a_3=a_5=a_6=0$ választással mind az öt összeg értéke $\frac{1}{3}$, ekkor tehát $M=\frac{1}{3}$. 2 pont

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy M értéke ennél kisebb nem is lehet:

Tegyük fel, hogy léteznek olyan, a feltételeknek eleget tevő $a_1, a_2, \ldots, a_7$ számok, melyek esetén $M<\frac{1}{3}$, vagyis mind az öt vizsgált összeg kisebb $\frac{1}{3}$-nál. 1 pont

Ekkor az $a_1+a_2+a_3<\frac{1}{3}$, $a_3+a_4+a_5<\frac{1}{3}$ és $a_5+a_6+a_7<\frac{1}{3}$ egyenlőtlenségek összeadásával az $a_1+a_2+2a_3+a_4+2a_5+a_6+a_7<1$ egyenlőtlenséghez jutunk. 1 pont

Tudjuk, hogy $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=1$, ennek figyelembevételével az előző egyenlőtlenségből $a_3+a_5<0$ adódik, 1 pont
ami azonban lehetetlen, hisz nemnegatív számok összege nem lehet negatív. 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát $M<\frac{1}{3}$ valóban nem lehetséges, tehát M legkisebb értéke $\frac{1}{3}$ lehet. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Írjuk fel a két „hiányzó” összeget is, vagyis $a_6+a_7+a_1$-et és $a_7+a_1+a_2$-t. Ezekre teljesülnek az

$$a_6+a_7+a_1 \leqq (a_5+a_6+a_7)+(a_1+a_2+a_3) \leqq 2M$$

és az

$$a_7+a_1+a_2 \leqq (a_5+a_6+a_7)+(a_1+a_2+a_3) \leqq 2M$$

becslések. 2 pont

Ezekkel együtt a hét összeg összege egyrészt

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+(a_3+a_4+a_5)+(a_4+a_5+a_6)+(a_5+a_6+a_7)+$$
$$+(a_6+a_7+a_1)+(a_7+a_1+a_2)=3\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)=3$$ 1 pont

másrészt

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+(a_3+a_4+a_5)+(a_4+a_5+a_6)+(a_5+a_6+a_7)+$$
$$+(a_6+a_7+a_1)+(a_7+a_1+a_2) \leqq M+M+M+M+M+2M+2M=9M,$$

ahonnan $3 \leqq 9M$, tehát $\frac{1}{3} \leqq M$. 2 pont

Az egyenlőség meg is valósítható, ugyanis az $a_1=a_4=a_7=\frac{1}{3}$, $a_2=a_3=a_5=a_6=0$ választással mind az öt összeg, tehát M értéke is $\frac{1}{3}$, vagyis M legkisebb értéke valóban $\frac{1}{3}$. 2 pont

Összesen: 7 pont