4. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2016\sqrt{x_{2016} - 2016^2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}}{2}.$$

Megoldás. Tekintsük az egyenlet bal oldalán álló kifejezés k. tagját:

$$k\sqrt{x_k - k^2} = \sqrt{k^2\left(x_k - k^2\right)}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenlőség jobb oldala a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján kisebb vagy egyenlő, mint $\dfrac{k^2 + \left(x_k - k^2\right)}{2} = \dfrac{x_k}{2}$, 2 pont

egyenlőség pontosan akkor áll fent, ha $x_k = 2k^2$. 1 pont

(A felírt becslések akkor is igazak maradnak, ha valamelyik k-ra $x_k = k^2$. Ilyenkor a gyökös kifejezés értéke 0, $\dfrac{x_k}{2}$ pedig pozitív.)

Ha összeadjuk a tagokat $k = 1$-től 2016-ig, azt kapjuk, hogy egyenlőség csak akkor lehet, ha $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_3 = 18$, $\ldots$, $x_{2016} = 2 \cdot 2016^2$. 2 pont

Ezek a számok valóban kielégítik az egyenletet. 1 pont

Összesen: 7 pont