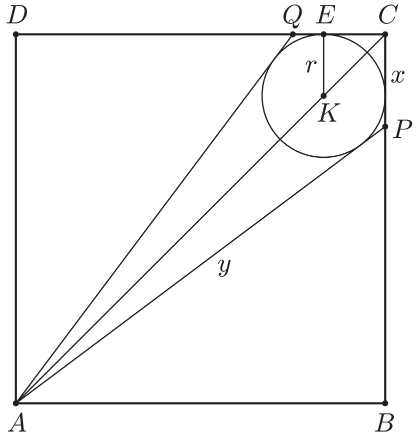
4. Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzetben a BC és CD oldalak egy-egy belső pontja P, illetve Q. Az $APCQ$ négyszögbe olyan kör írható, amelynek K középpontjára $KA : KC = 5$ teljesül. Mekkora az $APCQ$ négyszög területe?
(*In memoriam Bartha Gábor*)

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit!

Mivel a kör érinti a négyzet oldalait, ezért középpontja rajta van az AC átlón, és a tengelyes szimmetria miatt a keletkező négyszög deltoid.

ACD és KCE hasonló háromszögekből:

$$\frac{r}{AD} = \frac{KC}{AC} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{6}.$$ 1 pont

Mivel az érintő merőleges a sugárra, ezért APK, PCK, CQK, QAK háromszögek magassága a beírt kör sugara.

Felírjuk a négyszög területét a háromszögek területének összegeként:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (2yr + 2xr), \quad \text{ebből} \quad r = \frac{T}{x+y}.$$ 1 pont*

Pitagorasz tétele alapján a deltoid átlói: $QP = \sqrt{2} \cdot x$; $AC = \sqrt{2}$.

Így a deltoid területe:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} = x.$$ 1 pont

Pitagorasz tételéből:

$$y = \sqrt{1^2 + (1-x)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,.$$ 1 pont

Így a sugárra felírt képlet alapján:

$$\frac{1}{6} = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}\,,$$

$$x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 6x,$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 5x,$$

$$x^2 - 2x + 2 = 25x^2,$$

$$24x^2 + 2x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{4}.$$ 2 pont

A negatív gyök nem tekinthető helyes megoldásnak, mivel x egy szakasz hossza, de a második gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

Tehát a négyszög területe $\frac{1}{4}$ területegység. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

* Ez a pont jár akkor is, ha a vizsgázó a függvénytáblázatban található képletre hivatkozik.