2. Milyen a és b valós értékekre lesz a $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=2016$ egyenletnek végtelen sok megoldása a valós számok halmazán?

Megoldás. Átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}=2016-\sqrt{x}.$$

Mivel a bal oldalon nemnegatív szám áll, ezért a jobb oldal is nemnegatív, így $x \leqq 2016^2$. A négyzetgyök értelmezhetősége miatt $x \geqq 0$. Tehát $0 \leqq x \leqq 2016^2$ esetén van megoldása az egyenletnek. 2 pont

Négyzetre emelve kapjuk, hogy:

$$x+a\sqrt{x}+b=2016^2-2\cdot 2016\cdot\sqrt{x}+x. \qquad \text{1 pont}$$

Rendezzük át $\sqrt{x}$-re:

$$(a+2\cdot 2016)\sqrt{x}=2016^2-b. \qquad \text{1 pont}$$

Csak akkor kapunk végtelen sok megoldást, ha $\sqrt{x}$ együtthatója és a jobb oldal is nulla. Ebben az esetben $a=-2\cdot 2016=-4032$ és $b=2016^2=4\,064\,256$. 2 pont

A kapott a és b értéket behelyettesítve ellenőrizhetjük a megoldásunkat, amennyiben feltesszük, hogy $0 \leqq x \leqq 2016^2$:

$$\sqrt{x-2\cdot 2016\sqrt{x}+2016^2}+\sqrt{x}=\sqrt{\left(2016-\sqrt{x}\right)^2}+\sqrt{x}=\left|2016-\sqrt{x}\right|+\sqrt{x}=$$
$$=2016-\sqrt{x}+\sqrt{x}=2016. \qquad \text{1 pont}$$

Azaz minden $0 \leqq x \leqq 2016^2$ valós x megoldása az egyenletnek.

Összesen: 7 pont