Több megoldás egy feladatra – Téglalap területe

Feladat: Legfeljebb mekkora lehet annak a téglalapnak a területe, amelynek a kerülete 20 egység?

Elemzés: Az oldalak **jelölése** x, $y > 0$;
a **feltétel** $2(x + y) = 20$, vagyis $x + y = 10$; a terület **kifejezése** $t = xy$.

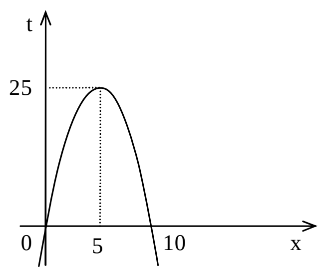
A feladat tehát az (1) $x + y = 10$, $x, y > 0$ feltétel mellett a
(2) $t = xy$ kifejezés maximalizálása.

Gondolatmenetek, útmutatások

Gyöktényezős alak: $t(x) = x(10 – x)$;

M1: algebrailag: a maximumhely a zérushelyek átlaga ($x_1 = 0$; $x_2 = 10$)

M2 (függvényszemlélet)**:** grafikusan: a függvénygörbe szimmetriája



Teljes négyzetté alakítás: $t(x) = –(x – 5)^2 + 25$

M3: a maximum algebrai meghatározása

M4 (függvényábrázolás)**:** maximum függvénytranszformációkkal

Általános alak: az $ax^2 + bx + c$ kifejezés szélsőértéke: $x = \frac{-b}{2a}$ helyen

M5: $t = -x^2 + 10x$ maximális, ha $x = \frac{-10}{-2} = 5$.

Szimmetria: $x = 5 + d$, $y = 5 - d$ helyettesítés.

M6: $t = (5 + d)(5 - d) = 25 - d^2$ maximális, ha $d = 0$.

Hatványközepek: $\sqrt{t} = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{10}{2} = 5$.   (3 információ!)

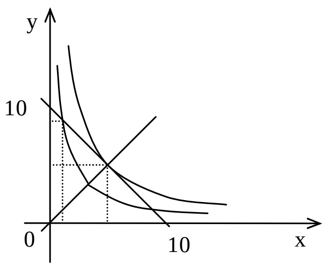
M7: **1.** t-nek maximuma van; **2.** a maximum 25; **3.** akkor, ha $x = y$.

Másodfokú paraméterezés: $-x^2 + 10x - t = 0$; $D = 100 - 4t \geq 0$

M8: Van megoldás, ha $t \leq 25$; tehát t maximuma 25.

Koordinátageometriai paraméterezés: $y = -x + 10$ és $y = \frac{t}{x}$ görbék közös pontja (t maximalizálása – tengelyes szimmetria)

M9: t maximális, ha $x = y = 5$ ($t = 25$); ekkor még van közös pont.



Trigonometriai módszerek

Derékszögű háromszögben $x = c\cdot\sin\alpha$, $y = c\cdot\cos\alpha$; a feltétel

(1) $c(\sin\alpha + \cos\alpha) = 10$, és (2) $t = \dfrac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ maximalizálandó.

M10: Hibás megoldás a $\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha} \le \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2}$ hatványközép egyenlőtlenség; ($\sin\alpha + \cos\alpha$ nem állandó; α változásával c is változik).

Megjegyzés: $\sin\alpha\cos\alpha$ és ($\sin\alpha + \cos\alpha$) kifejezések egyszerre max.

M11: (1)-ből $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{100}{c^2}$; (2)-ből $t_\Delta = \dfrac{100 - c^2}{4}$.

Átfogalmazás: a feladat c minimalizálása, ha $x + y$ = állandó.
(Persze c nem lehet akármilyen kicsi.)

M12 (hatványközepek): $5 = \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Tehát $c \ge 5\sqrt{2}$; egyenlőség $x = y$ esetén van.

M13: (2)’ $t = \frac{100^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{100^2}{2} \cdot \frac{z}{1+2z}$ maximális, ha $\frac{2z+1}{z} = 2 + \frac{1}{z}$ minimális.

Átfogalmazás: $z = \sin\alpha\cos\alpha$ maximalizálandó. (Ez c-től független.)

M14 (hatványközepek): $\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha} \le \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

M15 (addíciós tétel): $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2} \le \frac{1}{2}$; =, ha $\alpha = 45°$.

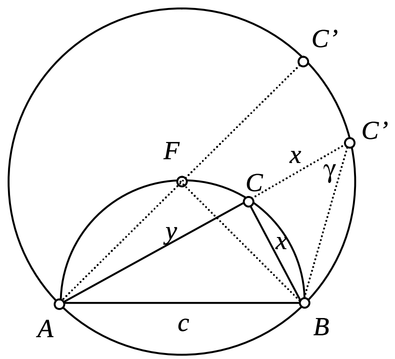
M16 (addíciós tétel): $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right)$ = $\sin x + \cos x$ maximális, ha $x = \frac{p}{4}$.

M17 (skaláris szorzat): $(\sin\alpha; \cos\alpha)\cdot(1; 1) = \sin\alpha + \cos\alpha$ (koordinátákkal) = $1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\varphi$ (definíció). Max, ha $\varphi = 0°$ ($\alpha = 45°$)

M18. (geometriai szemlélet, mértani hely): Rögzített *c* esetén a *C* csúcs ellipszisen mozog; a terület max., ha a háromszög egyenlő szárú.
Megjegyzés: Izoperimetrikus problémák

M19 duális állítások (dualitás elve): Legalább mekkora lehet annak a téglalapnak a kerülete, amelynek a területe 25 egység?
A feladat tehát az (1) $xy = 25$, x, $y > 0$ feltétel mellett a
(2) $k = x + y$ kifejezés maximalizálása.

M20 (M11 duálisa; kerületi-középponti szögek): A feladat $x + y$ maximalizálása, ha c állandó. A maximum $C \equiv F$ esetén lép fel.



M21 (differenciálszámítás): $t'(x) = -2x + 10 = 0$ szükséges feltétel.