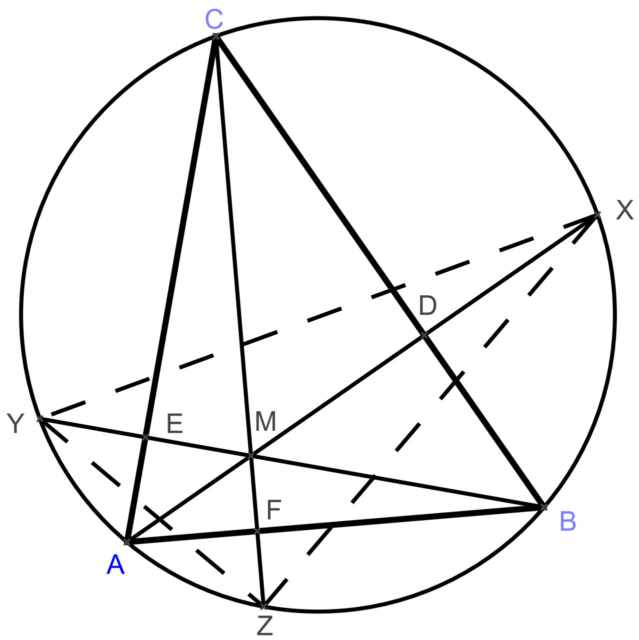
Feladat: Az ABC háromszög szögei $CAB\angle = 75°$ és $ABC\angle = 60°$. Legyenek az ABC háromszög magasságpontjának a BC, CA és AB oldalakra vonatkozó tükörképei rendre az X, Y és Z pontok. Közelítő értékek használata nélkül határozza meg az XYZ és ABC háromszögek területének arányát!

I. Megoldás: A háromszög mindhárom szöge hegyesszög, a magasságpont tehát a háromszög belső pontja. Legyenek a háromszög magasságvonalainak a BC, CA és AB oldalakkal való metszéspontjai rendre D, E és F.



Az $AFME$ négyszög két szemben fekvő szöge derékszög, ezért a négyszög húrnégyszög, innen azt kapjuk, hogy $EMF\angle = CMB\angle = 105°$. Az X pont az M magasságpontnak a BC oldalra vonatkozó tükörképe, ezért $CXB\angle = 105°$. Látható, hogy $CAB\angle + BXC\angle = 180°$. A $BACX$ négyszög húrnégyszög, az X pont az ABC háromszög körülírt körén fekvő pont. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy Y és Z is a körülírt körön levő pontok. Az ABE és ACF derékszögű háromszögekben $ABE\angle = ACF\angle = 15°$, ebből a tükrözés tulajdonsága miatt $ABZ\angle = ACY\angle = 15°$ következik. A kerületi szögek tétele szerint$YCZ\angle = YXZ\angle$, így beláttuk, hogy $YXZ\angle = 30°$. Hasonlóan kapjuk, hogy $FCB\angle = MCD\angle = 30°$, és így a tükrözés miatt $MCX\angle = ZCX\angle = 60°$, innen pedig a kerületi szögek tétele miatt $XYZ\angle = 60°$. Eszerint az XYZ háromszög harmadik szöge derékszög, az XYZ háromszög félszabályos. AZ ABC és XYZ háromszögek körülírt köre közös, legyen ennek a sugara R. A továbbiakban felhasználjuk a szögekre vonatkozó eredményeinket. Az általános szinusztétel szerint

$$ZX = 2Rsin60° = R\sqrt{3}, \text{ és } YZ = 2Rsin30° = R.$$

Az XYZ háromszög derékszögű, ezért területe

$$T_1 = \frac{XZ \cdot YZ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Felhasználva a két szög összegének szinuszára vonatkozó addíciós tételt:

$$sin75° = sin(45° + 30°) = sin45°cos30° + cos45°sin30° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Ugyancsak az általános szinusztétel szerint

$$AB = 2Rsin45^\circ = R\sqrt{2},\ \text{és}\ BC = 2Rsin75^\circ = R\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

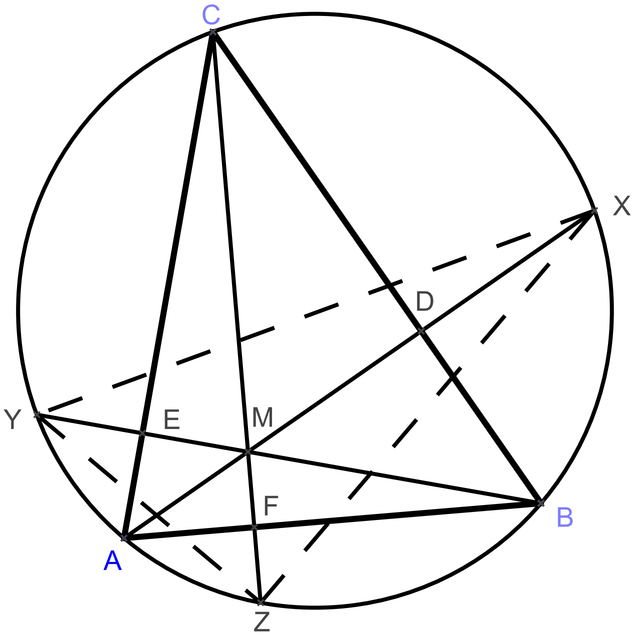
Az ABC háromszög T területére az eddigiek alapján:

$$T = \frac{AB \cdot BC \cdot sin60^\circ}{2} = \frac{R^2\sqrt{6}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{8} = \frac{R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

A két terület aránya

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1.$$

II. Megoldás: A háromszög mindhárom szöge hegyesszög, a magasságpont tehát a háromszög belső pontja. Legyenek a háromszög magasságvonalainak a BC, CA és AB oldalakkal való metszéspontjai rendre D, E és F.



Az $AFME$ négyszög két szemben fekvő szöge derékszög, ezért a négyszög húrnégyszög, innen azt kapjuk, hogy $EMF\angle = CMB\angle = 105°$. Az X pont az M magasságpontnak a BC oldalra vonatkozó tükörképe, ezért $CXB\angle = 105°$. Látható, hogy $CAB\angle + BXC\angle = 180°$. A $BACX$ négyszög húrnégyszög, az X pont az ABC háromszög körülírt körén fekvő pont. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy Y és Z is a körülírt körön levő pontok. AzABE és ACF derékszögű háromszögekben $ABE\angle = ACF\angle = 15°$, ebből a tükrözés tulajdonsága miatt $ABZ\angle = ACY\angle = 15°$ következik. A kerületi szögek tétele szerint$YCZ\angle = YXZ\angle$, így beláttuk, hogy $YXZ\angle = 30°$. Hasonlóan kapjuk, hogy $FCB\angle = MCD\angle = 30°$, és így a tükrözés miatt $MCX\angle = ZCX\angle = 60°$, innen pedig a kerületi szögek tétele miatt $XYZ\angle = 60°$. Eszerint az XYZ háromszög harmadik szöge derékszög, az XYZ háromszög félszabályos. A terület kiszámításához használjuk fel a következő összefüggéseket:

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$$

$$AB = 2R sin 45°; \qquad BC = 2R sin 75°; \qquad CA = 2R sin 60°$$

és

$$T_{XYZ} = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4R}$$

$$XY = 2R sin 90°; \qquad YZ = 2R sin 30°; \qquad ZX = 2R sin 60°$$

rendezés után

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} = 2R^2 \cdot sin 45° \cdot sin 60° \cdot sin 75°$$

$$T_{XYZ} = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4R} = 2R^2 \cdot sin 90° \cdot sin 60° \cdot sin 30°\,,$$

valamint

$$sin75° = sin(45° + 30°) = sin45°cos30° + cos45°sin30° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

A két terület aránya

$$\frac{T_{XYZ}}{T_{ABC}} = \frac{2R^2 \cdot sin90° \cdot sin60° \cdot sin30°}{2R^2 \cdot sin45° \cdot sin60° \cdot sin75°} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$$