Emelt szintű tankönyv, 11-12. o, 26. oldal:

2. példa Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + xy + y^2 = 0$ egyenletnek csak az $(x; y) = (0; 0)$ egyetlen megoldása van!

Megoldás Ha az egyik változó nulla, akkor a másiknak is nullának kell lenni, s ez valóban megoldás. A továbbiakban feltesszük, hogy $x, y \neq 0$, és több (nem mind lényegesen különböző) megoldást is adunk.

Első megoldás: Ha $x = y$, akkor $x = y = 0$ következik. Tegyük fel, hogy $x > y$, és szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $x - y > 0$-val!

$x^2 + xy + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - y^3 = 0.$

Ellentmondást kaptunk: $x^3 - y^3$ pozitív, így $(x; y) = (0; 0)$ az egyetlen megoldás.

Második megoldás:

Ha x és y azonos előjelű, akkor az $x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy > 0$, míg ha x és y ellentétes előjelű, akkor az $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy > 0$ átalakítás vezet célhoz.

Harmadik megoldás:

Teljes négyzetté alakítunk. $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$, és ez a kifejezés valóban nem lehet zérus, ha $x, y \neq 0$.

Negyedik megoldás:

Mint az előbb, most is a vegyes paraméteres egyenletet vizsgáljuk (azaz úgy tekintjük az egyenletet, mintha x lenne a változó és y a paraméter). Az egyenlet diszkriminánsa $D = y^2 - 4y^2 < 0$. x^2 együtthatója pozitív, így a kifejezés minden megengedett x-re pozitív értéket vesz fel.

Általánosítás:

Az eddigi megoldásokból látszik, hogy ha $x, y \neq 0$, akkor $x^2 + xy + y^2$ pozitív. Ezt az egyszerű állítást még kétféleképpen bebizonyítjuk.

Az első módszer *paraméterezéses eljárása* más esetekben is nagyon jól használható (lásd például a 6. kitűzött feladatot). Ekkor a $K = x^2 + xy + y^2$ kifejezés értékkészletének vizsgálata helyett az $x^2 + xy + y^2 = p$ paraméteres egyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Világos, hogy K pontosan olyan p értékeket vehet fel, amilyen p-re megoldható a $K = p$ egyenlet.

$x^2 + xy + y^2 = p \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + xy + y^2 - p = 0,$

és pontosan akkor van megoldás, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív. Tekintsük x-et változónak:

$D \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 4(y^2 - p) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3y^2 + 4p \geq 0.$

Az eredményből következik, hogy $p \geq 0$ (különben a bal oldal negatív lenne), és $p \neq 0$ (különben $y = 0$ lenne).

A **második módszer** *becslést* alkalmaz. A $K = x^2 + xy + y^2$ kifejezés csak akkor lehetne negatív, ha x és y különböző előjelű. Legyen például $x > 0$ és $y < 0$, és alkalmazzuk a $z = -y$ helyettesítést; ekkor $z > 0$ és $K = x^2 - xz + z^2$. Az xz tagot „felülről" (az $x^2 + z^2$ összeget „alulról") becsülhetjük: $xz \leq \frac{x^2 + z^2}{2}$. (Ez a becslés következik az $(x + z)^2 \geq 0$ teljes négyzetből, vagy az x és z számokra felírt mértani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenségből.)

Készen vagyunk: $K = x^2 + z^2 - xz \geq 2xz - xz = xz > 0.$