

Érthető matematika tankönyv, 10. o, 30. oldal:

Példa

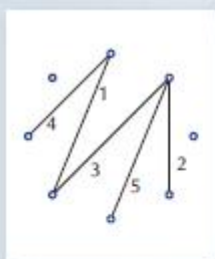
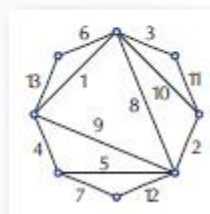
Anna és Béla ismét egy matematikai játékkal foglalkoznak. Megrajzolják egy szabályos nyolcszög csúcsait, majd felváltva behúzzák a sokszög valamelyik oldalát vagy átlóját. A játékszabály szerint ezt úgy kell megtenniük, hogy a berajzolt szakaszok nem metszhetik egymást, csak legfeljebb közös végpontjuk lehet. Az a játékos veszít, aki már nem tud újabb szakaszt behúzni.

A játékot Anna kezdi. Hogyan játsszon? Van-e valamilyen ügyes stratégiája?

Megoldás (A játék elemzése)

Az első ábrán egy próbajáték lefolyását látjuk, a szakaszokat megrajzolásuk sorrendjében sorszámoztuk. Az utolsó, 13. szakasz behúzása után Béla már nem tudott újabbat felvenni, így a játékot a kezdő Anna nyerte.

Anna és Béla a próbajátékban véletlenszerűen rajzolgatták a szakaszokat. De hogyan tud Anna tudatosan játszani?



Első gondolatmenet:

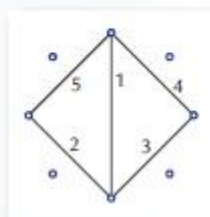
Anna észreveheti, hogy a nyolcszög oldalait a többi szakasz nem metszi. Ezért ezeket mindig behúzzuk a játék folyamán, függetlenül attól, hogy éppen melyik átlók vannak megrajzolva. Összesen nyolc oldal van. Ha Béla valamelyik oldalt megrajzolja, akkor Anna szintén egy oldal behúzásával válaszolhat. Ha Béla egy másik oldalt rajzol meg, akkor Anna is így tesz és így tovább; azaz ily módon játszva a teljes játék kimenetelét nem befolyásolja a négy oldalpár behúzási sorrendje.

Annának elegendő tehát az átlók behúzására koncentrálni. Egy egyszerűsített játék látható a második ábrán.

Ha csak az átlók lehetséges behúzásait elemezzük, még mindig elég sok helyzetet kell megvizsgálni.

Második gondolatmenet:

Ki lehet használni a nyolcszög tengelyes szimmetriáját. Ha kezdéskor Anna a nyolcszög egyik tükörtengely-átlóját húzza be, akkor ezután bármelyik szakaszt is húzza be Béla, Anna mindig megteheti, hogy annak a tengelyesen tükrös párját rajzolja meg. (Ez igaz az oldalakra is.) Mivel a behúzható szakaszok előbb-utóbb elfognak, és Anna Béla minden lépésére tud válaszolni, így ezzel a stratégiával Anna biztosan nyer.



Harmadik gondolatmenet:

Természetesen jó a középpontos szimmetrián alapuló stratégia is. Kezdlépésként egy középponton átmenő átló felvétele után Béla lépéseit középpontosan tükrözheti Anna. (Ezt mindig megteheti: ne felejtjük el, hogy Béla már nem rajzolhat középponton átmenő átlót.)

Sikerült tehát Annának nyerő stratégiát találni. A játék elemzésével azonban még nem vagyunk készen.

Negyedik gondolatmenet:

Észrevehetjük, hogy az eddigi játékokban pontosan 5 átlót húztak be a játékosok (vagy az oldalakat is számítva 13 szakaszt). *Ez vajon mindig így van?* Ha igen, mi lehet ennek az oka?

A játék befejezésekor a nyolcszöget átlóinak behúzásával háromszögekre bontottuk fel. (Ha maradt volna még négyszög is, akkor az átlója behúzásával a játék folytatható lenne.) A háromszögek szögei együttesen kiadják a nyolcszög szögeit. Mivel a nyolcszög belső szögeinek összege $6 \cdot 180^\circ$, emiatt éppen 6 háromszögre tudjuk felbontani, bárhogyan is rajzoljuk meg az átlókat. Kérdés, hogy ehhez mindig 5 átlóra van-e szükség?

Bármennyire nyilvánvalónak is tűnik az állítás, bizonyítanunk kell.

A 6 háromszögnek összesen $6 \cdot 3 = 18$ oldala van. Ha x számú átlót vettünk fel, akkor ezeket a háromszög-oldalakat ekkor kétszer számoltuk, míg a nyolcszög oldalaival egybeeső háromszög-oldalakat csak egyszer. Innen $18 = 2 \cdot x + 8$, azaz $x = 5$ darab átló van valóban.

Ötödik gondolatmenet:

Anna stratégiáját nagymértékben *általánosíthatjuk*. A játék folyamán mindig 13 szakaszt rajzolnak meg a játékosok (8 oldal + 5 átló), bárhogyan is játszanak; és mivel Anna kezd, szükségképpen ő húzza be az utolsó szakaszt. Tehát Anna biztosan nyer, akárhogyan is játszik. (Nem tud hibás stratégiát választani.)

n csúcsú sokszögre hasonló gondolatmenettel $n + n - 3 = 2n - 3$ behúzendó szakaszt kapunk, így páros oldalszámú sokszög esetén mindig a kezdő játékos nyer, stratégiától függetlenül.

Összefoglalva:

- először egyszerűsítettük, áttekinthetőbbé tettük a játékot;
- ezután sikerült szimmetrián alapuló nyerő stratégiát találni;
- majd invariáns mennyiségre hivatkozva (a behúzott szakaszok száma) általánosítottuk a feladatot.