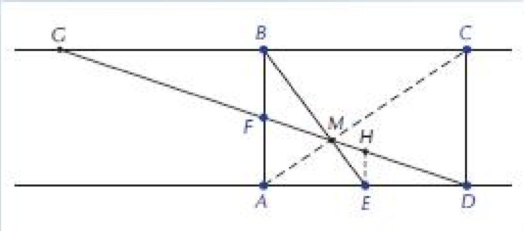
Érthető matematika tankönyv, 10. o, 230. oldal:

Példa

Az $ABCD$ téglalap AD oldalának felezőpontja E, AB oldalának felezőpontja F. A DF és BE egyenesek metszéspontja az M pont. Bizonyítsuk be, hogy az M pont rajta van az AC átlón!

Megoldás



Első megoldás (hasonlóság)

Jelölje G az FD és BC egyenesek metszéspontját. Ekkor az EMD és BMG háromszögek hasonlók, mert szögeik megegyeznek. A hasonlósági arány 2 ($BG = AD = 2ED$), így $2ME = MB$. Metssze az AM egyenes a BC oldalt a C' pontban. (Igazolnunk kell, hogy C és C' megegyezik.) $BC'M$ és EAM hasonló háromszögek, szintén 2 hasonlósági aránnyal (hiszen $BM = 2ME$); így $BC' = 2AE = BC$, vagyis $C \equiv C'$.

Eljárhatunk fordítva is. AC és EB olyan M' pontban metszik egymást, amelyre $BM' = 2M'E$, az AEM' és CBM' háromszögek hasonlósága miatt. Tehát A, M és C pontosan akkor esik egy egyenesbe, ha $M \equiv M'$, azaz $BM = 2ME$.

A további megoldásokban elegendő tehát a $BM:ME = 2:1$ arányt igazolnunk.

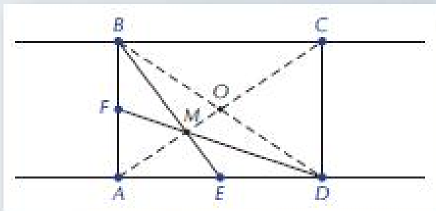
Felvehettük volna kezdetben a BE és CD egyenesek metszéspontját is (FD és BC metszéspontja helyett), hasonló gondolatmenetet alkalmazva.

Egy másik lehetőség, hogy E-ből párhuzamost húzunk AB-vel, s jelöljük H-val ennek a DF szakasszal vett metszéspontját. Ekkor EH az ADF háromszög középvonala, tehát $AF = 2EH$. Az EHM és BFM háromszögek hasonlók (szögeik megegyeznek), a hasonlóság aránya $\frac{BF}{HE} = \frac{2}{1}$. Tehát $BM = 2ME$; s innen az előző bizonyításhoz hasonlóan végezhetünk.

Természetesen most is **megtehettük volna**, hogy kezdéskor F-ből húzunk AD-vel párhuzamost.

Második megoldás (egybevágóság)

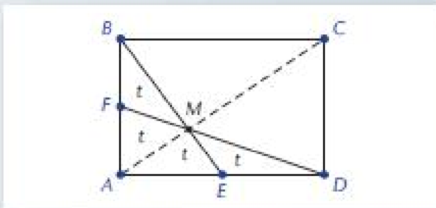
Az ADB háromszögben BE és DF súlyvonalak, M súlypont, tehát AM a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal egyenese. Jelölje O a BD átló felezőpontját (ez a téglalap átlóinak metszéspontja), ekkor AO a harmadik súlyvonal, tehát A, M, O egy egyenesre esnek. Mivel ezen az egyenesen van C is, így A, M, C valóban egy egyenesre esik.



Harmadik megoldás (területszámítás)

A BFM és AFM háromszögek területe megegyezik (jelöljük t-vel), mert BF és FA alapjaik hossza egyenlő, és az M-ből húzott magasságuk közös. $T_{AEB} = T_{ADF}$, mert mindkettő a téglalap területének negyede. A közös $AEMF$ négyszöget elhagyva a maradék területek is megegyeznek: $T_{BFM} = T_{MED}$ $(= t)$. Végül $T_{AEM} = T_{EDM}$ $(= t)$ is teljesül, mert $AE = ED$ és az M-ből húzott magasság közös a két háromszögben.

Készen vagyunk: $T_{BMA} = 2T_{EMA}$, és mivel a két háromszög A-ból húzott magassága közös, $BM = 2ME$ szükségképpen.

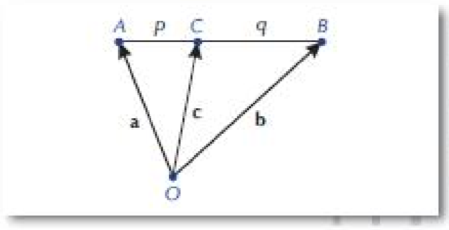


A területszámítás segítségével további összefüggéseket is felfedezhetünk az ábrán. (Például $T_{BCM} = T_{DCM} = 4t$ stb.)

Elegáns bizonyítás adható a vektorok segítségével.

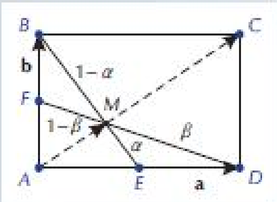
A vektorok osztásarány-tételének tanult alakját kissé módosítjuk. Emlékeztetőül: ha az AB szakaszt a C pont úgy osztja két részre, hogy $\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q}$, akkor a C pontba mutató helyvektor $\overrightarrow{OC} = \frac{q \cdot \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{OB}}{p+q}$, vagy rövidebben $\mathbf{c} = \frac{q \cdot \mathbf{a} + p \cdot \mathbf{b}}{p+q}$ módon adható meg. (Ez az összefüggés tetszőleges O kezdőpontra igaz.)

Észrevehetjük, hogy a képletben nem p és q konkrét értéke, hanem csak az *arányuk* számít: például $\frac{p}{q} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ stb. esetén egyaránt $\mathbf{c} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}$. Ezt kihasználva az **a** és **b** vektorok $\frac{q}{p+q}$, illetve $\frac{p}{p+q}$ együtthatóit jelölhetjük például α-val és $(1-\alpha)$-val is (hiszen összegük 1). Ekkor az osztásarány-tétel $\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{b}$ alakú lesz, ahol belső C pont esetén $0 < \alpha < 1$.



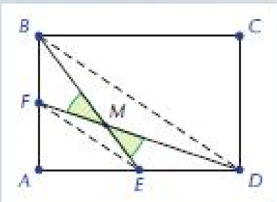
Negyedik megoldás (vektorok)

Vegyük fel az origót A-ban, s legyen $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Mivel M az EB szakasz valamilyen $\alpha : (1-\alpha)$ arányú osztópontja, felírható, hogy $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{B} + (1-\alpha)\overrightarrow{E} = \alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{a}}{2}$. Hasonlóan ha a DF szakaszt $\beta : (1-\beta)$ arányban osztja M, akkor $\overrightarrow{AM} = \beta\frac{\mathbf{b}}{2} + (1-\beta)\mathbf{a}$ alakban írható. A kétféle felírásnak meg kell egyezni: $\alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{a}}{2} = \beta\frac{\mathbf{b}}{2} + (1-\beta)\mathbf{a}$. Tudjuk, hogy a vektorok felbontása egyértelmű (most **a** és **b** a bázisvektorok), ezért $\alpha = \frac{\beta}{2}$ és $\frac{1-\alpha}{2} = 1 - \beta$ szükségképpen teljesül.



Az egyenletrendszer megoldása $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$. Ez egyrészt azt jelenti, hogy $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$, azaz $MB = 2ME$ és $\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{2}{1}$, azaz $MD = 2MF$. Másrészt az $\overrightarrow{AM} = \beta\frac{\mathbf{b}}{2} + (1-\beta)\mathbf{a}$ egyenletből $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ adódik. Mivel $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\overrightarrow{AM}$, így M valóban rajta van az AC átlón (az A-hoz közelebbi harmadoló pont).

Néhány olyan gondolatmenet következik, amelyben trigonometrikus összefüggéseket alkalmazhatunk.



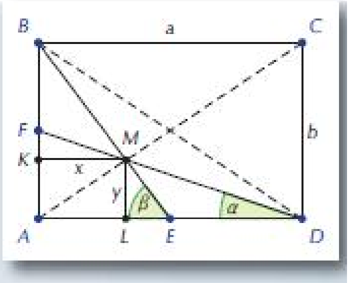
Ötödik megoldás (trigonometriai módszerek)

Korábban láttuk, hogy az AEB és ADF háromszögek területe egyenlő (a téglalap területének negyede), így a mindkettőben közös $AEMF$ részt elhagyva, $T_{DEM} = T_{FMB}$ is teljesül. A trigonometrikus területképletből $\frac{BM \cdot MF \cdot \sin FMB\sphericalangle}{2} = \frac{EM \cdot MD \cdot \sin EMD\sphericalangle}{2}$, innen a csúcsszögek egyenlősége miatt $BM \cdot MF = DM \cdot ME$. Ebből egyrészt a DF és EB szakaszok azonos osztásaránya következik: $\frac{BM}{ME} = \frac{DM}{MF}$; másrészt az FEM és DBM háromszögek hasonlósága (megegyezik két-két oldaluk aránya, és a közbezárt szögük). Az arányossági tényező $\frac{DB}{EF} = 2$, hiszen EF középvonal az ADB háromszögben. Ebből pedig már következik a $\frac{BM}{ME} = 2$ osztásarány, amiből a korábbi megoldásokban látott módon fejezhetjük be a bizonyítást.

Egy másik befejezési lehetőség, ha a $\frac{BM}{ME} = \frac{DM}{MF}$ egyenlő arányok segítségével az $AEMF$ és $CBMD$ négyszögek hasonlóságát vesszük észre: az M középpontú, -2 arányú középpontos nagyítás az $AEMF$ négyszöget $CBMD$-be viszi, így – mivel A pont képe a C pont – M valóban az AC szakaszon van.

Ha kezdetben behúzzuk az EF és BD segédszakaszokat, az $EDBF$ trapéz elemzésével is **röviden célt érünk**. (FEM és DBM háromszögek hasonlók, és a trapéz átlói a hasonlósági aránnyal megegyező arányban osztják egymást).

Egy **további trigonometriai jellegű megoldás** lehet, amikor merőlegeseket bocsátunk az M pontból az AB, illetve AD oldalakra; az így kapott szakaszok hossza legyen $KM = x$ és $LM = y$. Jelölje továbbá az ábra szerint α és β a DF, illetve EB szakaszok AD-vel bezárt szögét, valamint a és b a téglalap két oldalának a hoszszát. Az ábra alapján több – nem független – trigonometrikus összefüggést is felírhatunk, például: $\operatorname{tg}\beta = \frac{2b}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2a}$; vagy az ELM és MKB derékszögű háromszögekben $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{\frac{a}{2} - x}$ és $\operatorname{tg}\beta = \frac{b-y}{x}$; vagy a DLM és MKF derékszögű háromszögekben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{a-x}$ és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{2} - y}{x}$. Egy javasolt megoldási út: az egyenletekből x és y kifejezhető, eredményül $x = \frac{a}{3}$ és $y = \frac{b}{3}$ adódik. Ekkor $\frac{ML}{LA} = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} (= \operatorname{tg} CAD\sphericalangle) = \frac{CD}{DA}$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy M az AC szakaszon van.



Hatodik megoldás (koordináta-geometria)

Az ábrát a derékszögű koordináta-rendszerben helyezzük el úgy, hogy AD az x, AB pedig az y tengely legyen. A DF egyenes tengelymetszete $\frac{b}{2}$, meredeksége $-\frac{b}{2a}$, így egyenlete $y = -\frac{b}{2a}x + \frac{b}{2}$. Az EB egyenes egyenlete hasonlóan $y = -\frac{2b}{a}x + b$. A két egyenletből kiszámítható a két egyenes metszéspontja.

Az egyenletrendszer megoldása $(x; y) = \left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}\right)$, s ezek az M pont koordinátái. A megoldást többféleképpen is befejezhetjük, például:

– AM és AC meredeksége egyaránt $\frac{b}{a}$, így valóban egy egyenesen van a három pont;

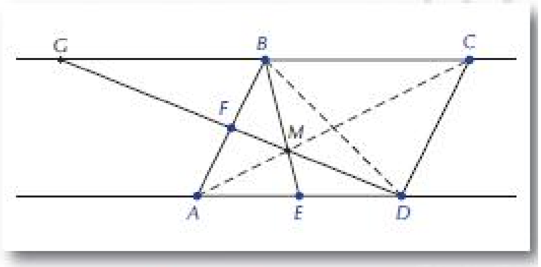
– vagy az AC egyenes egyenlete $y = \frac{b}{a}x$, és ha ebbe behelyettesítjük az M pont koordinátáit, az egyenlőség teljesülni fog. (Azaz M rajta van az AC egyenesen.)

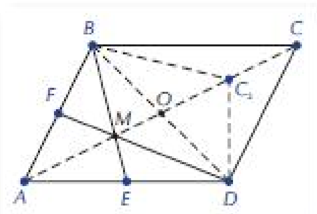
Általánosítási lehetőségek

Több szép megoldást adtunk a feladatra, de ne elégedjünk meg ennyivel!

Az utolsó megoldásokban kihasználtuk, hogy a téglalap szögei 90°-osak, de ha az első megoldást elemezzük, akkor észrevehetjük, hogy csak az AD és BC oldalak párhuzamosságát, valamint egyenlő hosszúságukat használtuk ki.

Ez éppen a paralelogramma definíciója, azaz **általánosíthatunk**: a feladat állítása paralelogrammára is teljesül (téglalap helyett).





Ha pedig a második, egybevágósági megoldást vizsgáljuk, ott azt láthatjuk, hogy elegendő, ha a C csúcs a (tetszőlegesen felvett) ADB háromszög AO súlyvonalán mozog. Azaz az állítás igaz minden olyan négyszögre is, amelynek ***BD* átlóját az *AC* átló felezi**.

Végül **speciális helyzeteket** is vizsgálhatunk. Például ez utóbbi esetben ha $BA = AD$, akkor $ADCB$ deltoid (a BD átlót az AC átló merőlegesen felezi). Az állítás igaz tehát a **deltoidokra** is.