Az ezerarcú hiperbola

Írta: Csontos András, Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium, 2022/D osztály
2021. április-május

Bevezető

A hiperbola fogalmával legtöbbször általános iskola hetedik osztályában találkoznak először a diákok az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény alakja kapcsán. Később a 11. osztályos koordináta-geometria tananyag vége fele kerül elő néhány óra erejéig. Azonban általában ekkor is csak az alakzat koordináta-geometriai jellemzésére, illetve egyenletének alkalmazásával néhány feladat megoldására kerül sor. Mindez azt eredményezi, hogy a hiperbolával egy átlagos diáknak igen kevés kapcsolódási pontja van. Hiszen a vele közösen tárgyalt alakzatokat van mihez kötni: a körnek számtalan megjelenési formája van. Parabolával a másodfokú egyenlet grafikonjában, illetve a parabolaantenna formájában találkozhatunk. Az ellipszis pedig a bolygómozgással kapcsolatos Kepler-törvények egyik fontos eleme. Ezek után már a hiperbola esetében is szükséges lenne valamilyen alkalmazást megmutatni.

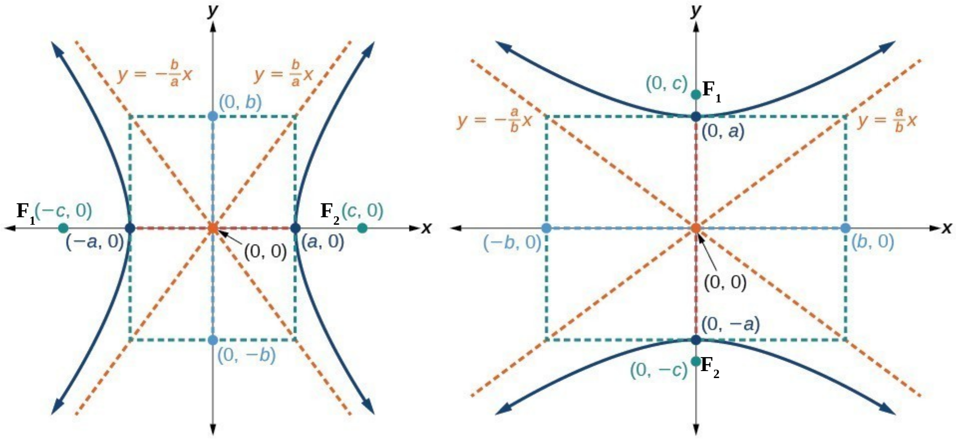
Ezen cikk ezt a hiányt igyekszik pótolni a hiperbolának és annak előfordulásainak szemléletes bemutatásával a matematikában, a fizikában, és a hétköznapi életben. A cikknek nem célja részletbe menő ismereteket nyújtani a különböző területekről. Inkább egy ismeretterjesztő képeskönyv szerepét tölti be, ami jobb esetben további utánaolvasásra és kutatásra sarkallja az olvasót. A cikk, habár tartalmaz a középiskolai követelményeken túlmutató elemeket, mindvégig a középiskola 10. osztályának végéig elsajátítható ismeretekre épül.

A hiperbola, mint mértani alakzat

A hiperbola definíciója a következő: azon *P* pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két rögzített ponttól (F_1 és F_2) vett távolságainak a különbsége állandó. ($|PF_1-PF_2|$=áll.) A két rögzített pont (F_1 és F_2) a hiperbola fókuszpontjai.

Látható, hogy a hiperbola két, egymást nem metsző görbe vonalból áll. Ezeket nevezzük a hiperbola ágainak. A hiperbola két szimmetriatengellyel rendelkezik. Az ágakon átmenő szimmetriatengelyen (a vezéregyenesen) helyezkednek el a fókuszpontok, a két tengely metszéspontjában pedig a hiperbola középpontja található. A hiperbola középpontján mennek át hiperbola aszimptotái, azok az egyenesek, amikhez a hiperbola két ága tart a végtelenben. Ha a hiperbolát 90°-kal elforgatjuk, az eredeti hiperbola konjugáltját kapjuk.

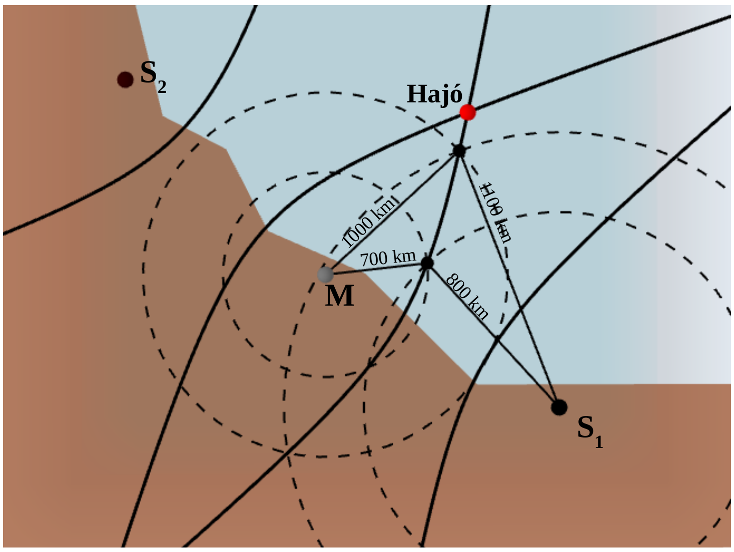
Derékszögű koordináta-rendszerben a hiperbolát a következő egyenlet írja le (amennyiben a hiperbola középpontja az origó): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. A lenti ábrán *(1. kép)* jól látható, hogy *a* és *b* konstansok milyen értékeket jelölnek: az a jelöli a hiperbola pontjainak a fókusztól vett távolságaik különbségének a felét (ugyanis $PF_1-PF_2=2a$), *b* pedig a pedig a Pitagorasz-tétel szerint $b=\sqrt{c^2-a^2}$, ahol *c* nem más, mint a két fókuszpont távolságának a fele ($F_1F_2=2c$). Az aszimptoták egyeneseinek egyenleteit is ezen értékek segítségével lehet leírni, ugyanis az egyiket az $y=\frac{b}{a}x$, másikat pedig az $y=\frac{-b}{a}x$ egyenlet fejezi ki. [1]



1. kép

Helymeghatározás a hiperbola segítségével

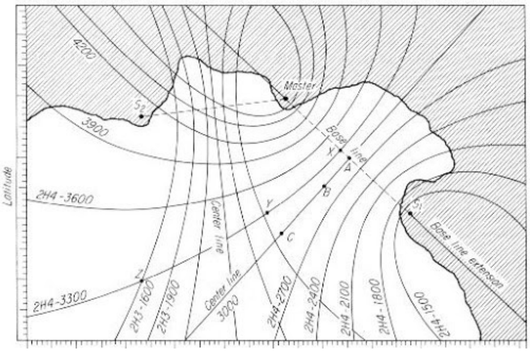
Ahhoz, hogy jobban megértsük a hiperbola természetét, nézzünk meg vele kapcsolatban egy egyszerű feladatot. Van a tengeren egy hajó, aminek a pontos helyzetét nem ismerjük. Azonban a tengerparton meg van adva három rögzített pont, amiket nevezzünk *M*-nek, S_1-nek, és S_2-nek. *M* és S_1 távolsága legyen 1000 km, *M* és S_2 távolsága pedig 1300 km. Tudjuk még azt is, hogy a hajónak a *M*-től és az S_1-től vett távolságainak a különbsége 100 km, illetve az *M*-től és az S_2-től vett távolságainak a különbsége pedig 50 km. Hogy határozzuk meg ezekből az adatokból a hajó helyzetét?



2. kép

Vegyük először az *M* és az S_1 pontot. Tudjuk, hogy a hajó távolságainak különbsége ezen pontoktól 100 km. Ez végtelen sok potenciális helyet határoz meg: lehet, hogy *M*-től 700, S_1-től 800 km-re van (800-700=100), de az is előfordulhat, hogy 1000, illetve 1100 km a távol van az egyik illetve a másik ponttól. Ezeket a helyeket a legegyszerűbben *M* és S_1 középpontú körök metszéspontjaival lehet megszerkeszteni, amelyek sugarainak a különbsége rendre 100 km *(2. kép)*. Ha sorra vesszük mindezeket a helyeket, és felrajzoljuk őket egy térképre, láthatjuk, hogy értelemszerűen egy hiperbola két ágának alakját adják, és a hiperbola két fókuszpontja *M* és S_1. Mivel tudjuk, hogy hajónk mely ponthoz van közelebb, ezért a továbbiakban elég az egyik ágat számításba vennünk. Ahhoz, hogy meghatározzuk, hogy ezen a görbe vonalon pontosan hol helyezkedik a hajónk, ugyanezt a lépéssorozatot kell végrehajtani az *M* és az S_2 pont esetében is, csak ott értelemszerűen olyan körökkel, melyek sugarainak különbsége 50 km. Így is kapunk egy hiperbola-ágat, ami metszi az *M* és S_1 pont hiperboláját, a hajó pedig a metszéspontban tartózkodik.

Ezt az elvet a gyakorlatban is alkalmazták hajók, illetve repülőgépek navigációjában. Az említett rögzített pontok helyén rádióadók voltak (gyakorlati jelölésük is *M*, S_1, S_2), a hajón vagy a repülőn pedig egy vevőkészülék. A két rádióadó egyszerre, szinkronizáltan bocsátott ki azonos terjedési sebességű rádióhullámokat, melyek beérkezései közötti idő- vagy fáziskülönbséget mérte a hajó, vagy repülőgép vevőkészüléke. A tengeren azok a pontok, ahol rádiójelek egy adott idő vagy fáziskülönbséggel érkezhettek be, egy hiperbolán helyezkedtek el *(3. kép)*. Mivel az adók jeleit meg lehetett különböztetni, ezért azt is tudták, hogy melyik ágon tartózkodnak éppen. A pontos helyzet meghatározásához itt is a másik két adó által meghatározott hiperbolára volt szükség. Bár mára ezeket a rendszereket a legtöbb helyen felváltotta a GPS, az első világháborútól kezdve sokáig a hiperbolikus navigáció volt a nagy távolságokon végzett helymeghatározás egyik alapja. [2]

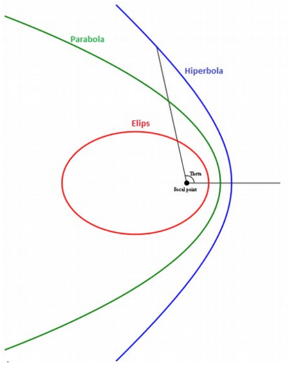


3. kép

Égitestek hiperbola alakú pályája

Mint láttuk, a hiperbola a 20. században sokszor segítségére volt a hajóknak és a repülőknek abban, hogy sikeresen eljussanak egyik pontból a másikba. Azonban a hiperbola nem csak földfelszínen van jelen a közlekedésben, hanem az űrben is. Ugyanis az űrszondákat a különböző bolygók hiperbola alakú pályán képesek felgyorsítani, lehetővé téve, hogy az univerzum távoli tartományaiba is eljussanak nagy mennyiségű üzemanyag felhasználása nélkül. Lássuk, hogyan működik ez.

Azzal mindannyian tisztában vagyunk, hogy amennyiben egy viszonylag kis tömegű égitest pályára áll egy nagyobb tömegű másik körül, akkor pályája ellipszis alakú lesz, aminek az egyik fókuszpontjában a nagy tömegű égitest helyezkedik el. Ám abban az esetben, ha egy kis tömegű égitest (üstökös, űrszonda) olyan pályán lép be egy nagyobb tömegű (bolygó) gravitációs mezejébe, hogy körpályára állás helyett csak elhúz mellette, és többet nem tér vissza oda, akkor ennek a pályának az alakja nem más, mint egy hiperbola. A hiperbola fókuszpontjában pedig nagy tömegű égitest áll, amit ebben az esetben mozdulatlannak tekintünk *(4. kép)*. (Ez a pálya ritkán, határesetben lehet parabola is, de ettől most tekintsünk el.)

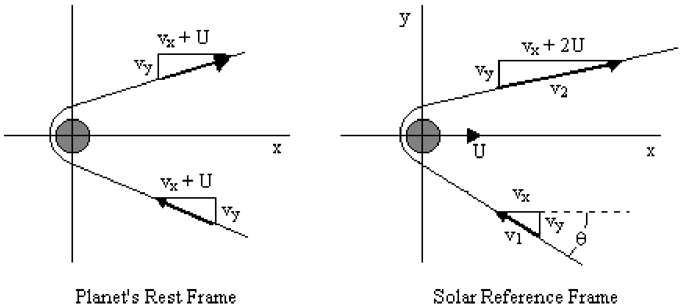


4. kép: Pályagörbék

Nyilvánvaló, hogyha a nagy tömegű égitest mozdulatlan, akkor a vele kölcsönhatásba lépő kis égitest hozzá közeledve felgyorsul, a hiperbola tengelypontján eléri a maximális sebességét, majd távolodva lelassul az eredeti sebességére. Ez folyamat azonban végeredményben semmit sem gyorsított az űrszondánkon, legfeljebb irányváltoztatásra alkalmas. A kívánt gyorsulás azonban mégis elérhető: nem mozdulatlan, hanem mozgó bolygó mellett kell elhaladnia az űrszondának.

Ha az űrszonda olyan pályán húz el a mozgó bolygó mellett, hogy távolodása közben sebességének van egyirányú komponense a bolygó sebességével, akkor a folyamat során az eredetinél nagyobb sebességre tesz szert *(5. kép)*. Az energiamegmaradás elve természetesen itt is érvényesül: az űrszonda a bolygó megkerülése közben a gravitációs kölcsönhatáson keresztül a bolygótól szerzi a plusz mozgási energiáját. Tehát a folyamat végére a bolygónak nagyon kis mértékben, de csökken a sebessége. Ha pedig az űrszonda a bolygó sebességével ellentétes irányban hagyja el a bolygót, akkor végeredményben veszít a sebességéből, és a bolygóé növekszik.

Mozgó bolygó esetén az űrszonda más sebességgel hagyja el a bolygót, mint ahogy megközelítette, tehát sebességének a bolygó sebességével bezárt szöge is megváltozik. Értelemszerűen az űrszonda pályája ebben az esetben nem hiperbola. Azonban ha pályáját képzeletben kettéválasztjuk a kanyarodási pontjánál, akkor a két rész már kifejezhető két külön hiperbolával. [3]

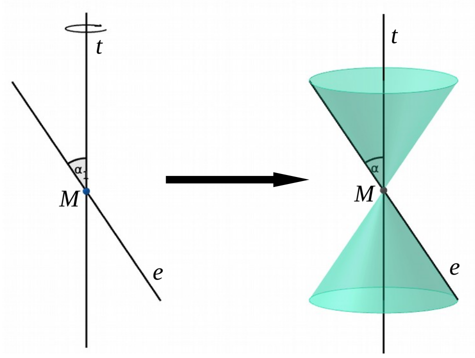


5. kép: az űrszonda pályája nyugalomban lévő, illetve mozgó bolygó mellett

A hiperbola definiálása kúpszeletként

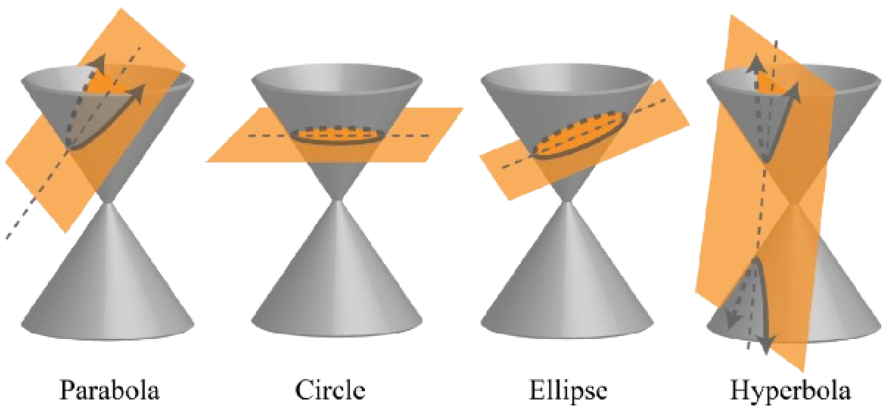
Ha szemügyre vesszük a kör ($(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$), az ellipszis ($\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$), a parabola ($y=\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$), és a hiperbola ($\frac{(x-u)^2}{a^2}-\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$) alakját derékszögű koordináta-rendszerben leíró egyenleteket, láthatjuk, hogy mindegyiket egy kétváltozós másodfokú egyenlet fejezi ki. Ez alapján arra következtethetünk, hogy valami kapcsolat létezik köztük. A kapcsolat oka a származtatásukban rejlik: ugyanis mindegyik alakzat definiálható egy kettőskúp síkmetszeteként. Éppen ezért ezeket az alakzatokat összefoglalóan kúpszeleteknek nevezik.

Vegyünk a térben két, egymást α hegyesszögben, *M* pontban metsző egyenest. Az egyik egyenes neve legyen *t*, a másiknak *e*. Ha *t* egyenes, mint tengely körül körbeforgatjuk a két metsző egyenest, akkor egy végtelen palásttal rendelkező kettőskúpot kapunk eredményül. A *t* egyenes a kúp tengelye, az *e* egyenes meg a kúp úgynevezett alkotója, az az egyenes, ami átmegy a kúp csúcsán, és végig érinti a kúp felszínét. A kúp nyílásszöge 2α. *(6. kép)*



6. kép: A kettőskúp létrehozása

Ha ezt a kettőskúpot egy *M* pontra nem illeszkedő síkkal a kúp tengelyére merőlegesen elmetsszük, akkor egy kört kapunk metszetként. Ha a metsző síknak a tengellyel bezárt szöge nagyobb, mint α, de kisebb, mint derékszög, akkor egy ellipszis jön létre a metszetben. Ha a metsző sík pont α szögben, az alkotóval párhuzamosan metszi el a *t* tengelyt, akkor egy parabolát, ha meg α szögnél kisebb szögben metszi a *t* egyenest, akkor egy hiperbolát hozunk létre. Látható, hogy megjelenik a hiperbola másik ága is, ugyanis ebben az esetben a sík a kettőskúp másik részébe is belemetsz. *(7. kép)*

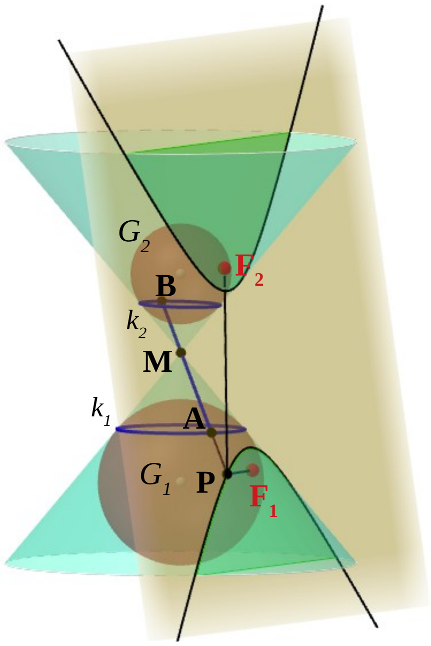


7. kép: Kúpszeletek

Ezen tételek bizonyításának egyik szemléletes és egyszerű módja az úgynevezett Dandelin-gömbökkel (ejtsd: *dandölen*) való igazolás. Ezek olyan kúpba írt gömbök, melyek egy körben érintik belülről a kúppalástot, és egy pontban érintik az adott síkmetszetet. A bizonyítás során igazolódik, hogy ez az érintési pont az adott kúpszelet fókuszpontja (kör esetén a középpont egy speciális ellipszis két, egybeeső fókuszpontja). Ilyenformán a kör, az ellipszis, és a hiperbola kettő, a parabola meg egy ilyen gömbbel rendelkezik. Mindegyik kúpszelet alakját lehet igazolni a Dandelin-gömbök segítségével, most azonban csak hiperbola bizonyítását vesszük sorra.

Állítás: Abban az esetben, ha egy sík egy kettős forgáskúpot úgy metsz, hogy mindkét kúpon átmegy, anélkül, hogy érintené a kúp alkotójának és tengelyének metszéspontját, akkor a kapott síkmetszet egy hiperbola alakját veszi fel.

Bizonyítás: Írjuk bele a kettőskúpba G_1 és G_2 Dandelin-gömböket, melyek k_1, illetve k_2 körökben érintik a kúpokat, továbbá F_1 illetve F_2 pontokban érintik a metszősíkot. Vegyünk fel a síkmetszet vonalán egy tetszőleges P pontot! Vegyük fel a P-t F_1-el illetve P-t F_2-vel összekötő szakaszokat. Továbbá kössük össze P pontot a k_2 körrel a kúpok M találkozási pontján keresztül. Ennek a szakasznak a végpontja a k_2 körön legyen B, a k_1 körrel képzett metszéspontja pedig A.

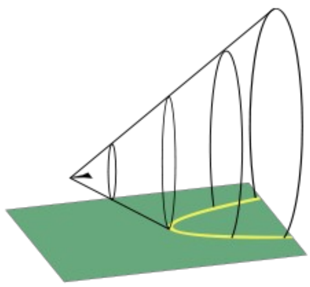


Vegyük észre, hogy AB szakasz a kúpok felszínén, azaz az alkotón megy végig, és akárhol van, két kört köt össze, ezért akármerre forgatjuk a kettőskúp tengelye körül, hossza állandó marad. A következő, amit megfigyelünk, az az, hogy $PF_1=PA$, ugyanis mindkettő egy külső pontból (P) egy gömbre bocsátott érintőszakasz. Ugyanezen ok miatt fennáll a $PB=PF_2$ összefüggés is. Így azonban felírhatjuk azt az egyenlőséget, hogy $PF_2\text{-}PF_1 = PB\text{-}PA = AB$. Viszont tudjuk, hogy AB alkotószakasz hossza, akárhogy forgatjuk, állandó marad. Ez azonban azt jelenti, hogy a síkmetszeten elhelyezkedő P pontoknak két rögzített ponttól (F_1 és F_2) vett távolságainak a különbsége állandó. Ez pedig nem más, mint egy hiperbola pontjainak a definíciója, tehát az állítást igazoltuk. Ezen felül belátható az is, hogy a gömböknek a síkmetszetet érintő pontjai (F_1 és F_2) a hiperbola fókuszpontjai. *(8. kép)* [4]

8. kép: Ábra a bizonyításhoz

A hétköznapokban is megjelenik a hiperbola, mint egy forgáskúp síkmetszete. Például egy fal mellett álló olvasólámpa hiperbola alakot vetít a falra, hiszen lámpa búrájából kúp alakú fénynyaláb jön ki, amit a fal síkja metsz *(9. kép)* . Másik példa hiperbolára a hangsebesség felett közlekedő vadászgép hangja. Ilyenkor egy hangrobbanásnak nevezett lökéshullám - sorozat jön létre, ami egy kúpfelület által meghatározott térrészben terjed. (ún. Mach-kúp). Ezt a kúpot a földfelszín síkként metszi, tehát a lökéshullámot hiperbola alakban lehet érzékelni a földön. *(10. kép)*

9. kép

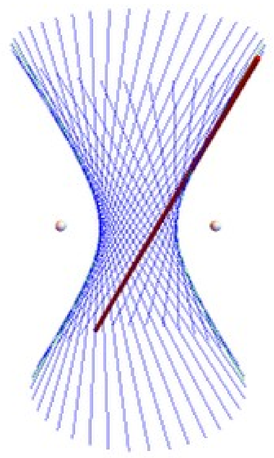


10. kép: A hangrobbanás

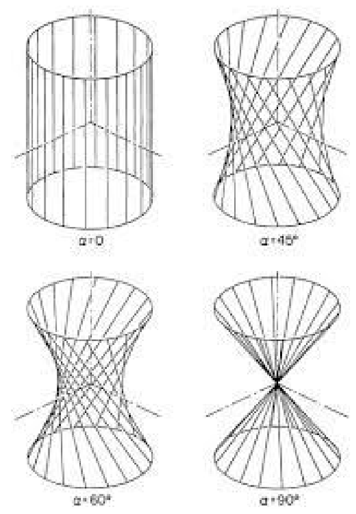
Hiperbolikus felületek

Térjünk vissza egy kis időre a térben megpörgetett metsző egyenesekhez! Távolítsuk el egymástól a két egyenest, oly módon, hogy kitérőek legyenek, és továbbra is α hegyesszöget zárjanak be. Ha ily módon forgatjuk meg az egyik egyenest a másik körül, akkor eredményül egy egyköpenyű forgási hiperboloidot kapunk. *(11. kép)*

Ilyen forgási hiperboloidot másképpen is előállíthatunk: veszünk egy síkbeli hiperbola görbét, és az ágait nem metsző szimmetriatengelye körül megpörgetjük. Harmadik generálási mód, hogy egy hengert a forgástengelye körül a körlapjainál fogva megcsavarunk. Látható, hogy ez az alakzat rokonságot mutat a kettőskúppal: ugyanis ha a pörgetés esetében a két egyenes metsző, vagy a csavarás alkalmazásánál a csavarás szöge 90°, akkor hiperboloid helyett egy kettőskúpot hozunk létre *(12. kép)*. A kapcsolat megmutatkozik a síkmetszetekben is: ahogy a kettőskúpnak van kör, ellipszis, parabola, és hiperbola alakú síkmetszete, ugyanezekkel az egyköpenyű hiperboloid is rendelkezik.



11. kép



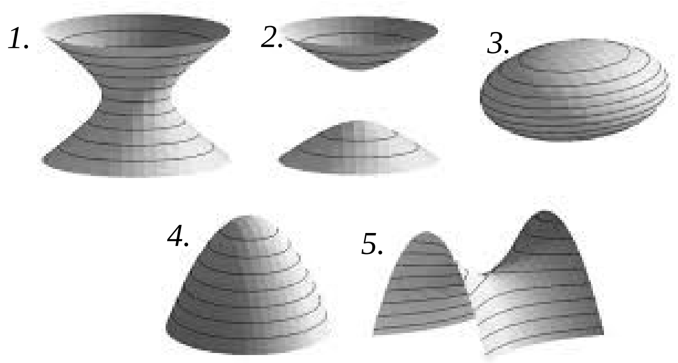
12. kép

Ez a térbeli felület az úgynevezett másodrendű felületek közé tartozik. Ezek olyan alakzatok, melyeket térbeli x, y, z tengelyű derékszögű koordináta-rendszerben egy másodfokú képlet segítségével adhatóak meg. Ilyenformán általános egyenletük a következő:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

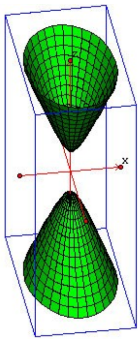
ahol az a_{ij} paraméterek valós számokat jelölnek, és az első hat együttható egyszerre nem 0. Azok az x,y,z pontok a térben, melyek eleget tesznek ennek az egyenletnek, egy felületet határoznak meg. Példának okáért egy (0; 0; 0) középpontú, 1 sugarú gömbfelület egyenlete: $x^2+y^2+z^2=1$.

Ugyanis a másodrendű felületek közé tartoznak a különböző ellipszoidok, így a gömb is. Ide sorolhatóak még az egyköpenyű, illetve a kétköpenyű hiperboloidok, a hiperbolikus, elliptikus paraboloidok, kúpfelületek (például az előzőleg említett kettőskúp), és a hengerfelületek is *(13. kép)*. A következőkben bővebben azokat a felületeket tárgyaljuk, amelyeknek kapcsolatuk van a hiperbolával.

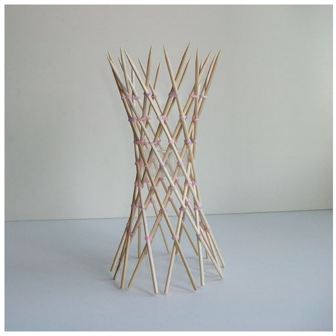


13. kép: Másodrendű felületek:
1. egyköpenyű hiperboloid
2. kétköpenyű hiperboloid
3. ellipszoid
4. elliptikus paraboloid
5. hiperbolikus paraboloid

A már említett egyköpenyű hiperboloidot a térben az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ egyenlet írja le. Ha az egyenletben a=b, akkor forgási hiperboloidot ír le. Amennyiben az egyenlet jobb oldalán elhelyezkedő értéket nullára redukáljuk, akkor egy kettőskúpot kapunk eredményül. Ha meg jobb oldalon szereplő érték negatív, akkor az alakzat egy kétköpenyű hiperboloid lesz. *(14. kép)* Ezen alakzat forgási változatát egy hiperbolának a vezéregyenese mentén való megpörgetésével lehet előállítani.



14. kép: Kétköpenyű hiperboloid

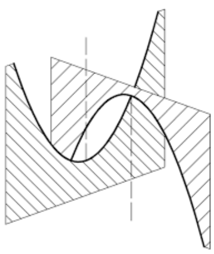


15. kép: A vonalfelület

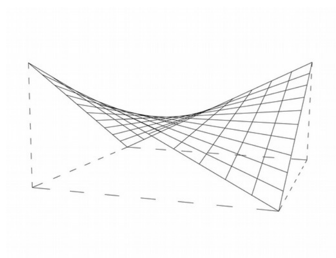
16. kép

Az egyköpenyű hiperboloid további figyelemreméltó tulajdonsága, hogy mindegyik pontján átmegy két olyan egyenes, amit a hiperbola tartalmaz *(15. kép)*. Ezeket az egyeneseket a hiperbola alkotóinak nevezzük, csakúgy, mint a kettőskúp esetében. Itt be is vezethetünk egy új fogalmat: azokat a felületeket, amiknek minden pontjukon átmegy egy olyan egyenes, amit tartalmaz az adott felület, vonalfelületeknek hívjuk. Ilyen felületeket szemléletesen úgy lehet előállítani, hogy egy egyenest rá merőleges irányban a térben valamilyen görbe mentén húzunk, közben forgatjuk ide-oda. Egy adott egyköpenyű hiperboloidhoz két ilyen alkotó egyenes is létezik. A hiperboloid vonalfelület volta a magyarázat a két kitérő egyenes forgatásával való előállításra. A hétköznapokban ezzel egy érdekes kísérleti eszköz formájában találkozhatunk: egy tengely körül forgatott ferde rúd akadálytalanul átmegy egy hiperbola alakú nyíláson *(16. kép)*.

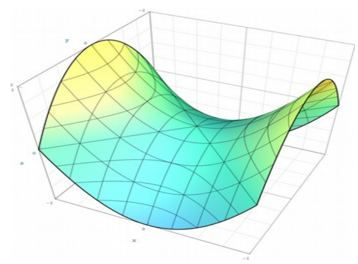
A következő hiperbolikus másodrendű felület a hiperbolikus paraboloid. Egyenlete: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2z$. Nevét onnan kapta, hogy bár parabolák segítségével alkotjuk meg, mégis van hiperbola alakú síkmetszete a parabola alakú síkmetszet mellett. Generálási módja pedig a következő: veszünk két tetszőleges parabolát, és „egymásba fordítjuk” őket oly módon, hogy az egyiknek a tengelypontja illeszkedjen a másik görbére *(17. kép)*. Ezután a tengelypontjával illeszkedő parabolát végighúzzuk a másikon, és az ez által létrejövő felület egy hiperbolikus paraboloid lesz. A keletkező alakzatot legkönnyebben egy nyeregfelületként lehet ábrázolni. Síkmetszete lehet hiperbola, parabola, vagy két metsző egyenes *(19. kép)*. A hiperbolikus paraboloid is vonalfelület, és egy adott pontján kettő alkotó is átmegy *(18. kép)*.



17. kép: Generálás parabolákkal



18. kép: Vonalfelület

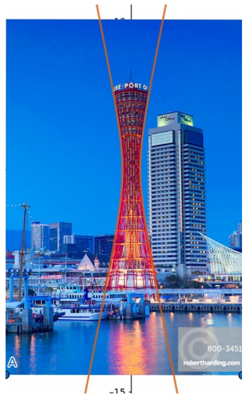


19. kép: A síkmetszetek vonalai

Az egyköpenyű hiperboloidot és a parabolikus hiperboloidot széles körben alkalmazzák az építészetben. Legnagyobb előnyük a vonalfelület voltuk, ugyanis ez lehetővé teszi a görbült felület létrehozását egyenes térelemek használatával, ami nagy könnyebbség a tervezés és a kivitelezés során. [5]

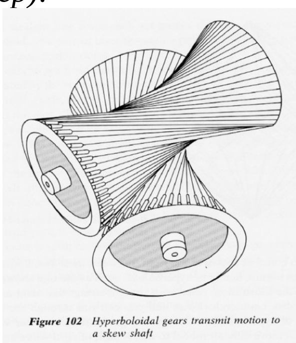
20. kép: Balra: a várpalota-inotai üzemen kívüli hőerőmű hűtőtornyai

21. kép: Jobbra: hiperbolikus szerkezetű torony, Kobe, Japán



A forgási hiperboloid alak egyik felhasználásával különböző tornyoknál találkozhatunk. Ennek oka stabil, alul kiszélesedő szerkezetükben keresendő, minek segítségével magas építményeket lehet létrehozni. Leggyakrabban vas- vagy vasbeton szerkezetű adótornyok, víztornyok, illetve erőművek hűtőtornyaiban fedezhető fel a hiperboloid alak *(20.; 21. kép)*. A hűtőtorony esetében további előnyökkel rendelkezik a hiperboloid forma: alsó, tágas részében elfér a nagy teret igénylő hűtőberendezés. A hűtőberendezésben párologtatás segítségével hűtik le a meleg folyadékot, így nagy mennyiségű gőz szabadul fel. A hiperboloid felfelé szűkülő keresztmetszetének köszönhetően a gőz felfelé áramlása felgyorsul, így rövid idő alatt magasra feljut. A torony tetején kiszélesedő keresztmetszet pedig a gőz levegővel való hatékonyabb keveredését, és ezáltal további hűlését teszi lehetővé. [6]

A forgási hiperboloid felfedezhető tengelykapcsoló fogaskerekeknél is: két, egymással nem párhuzamos tengelyt gyakran két egybevágó, és egymással tökéletesen érintkező hiperboloid alakú fogaskerékkel kapcsolnak össze *(22. kép)*.



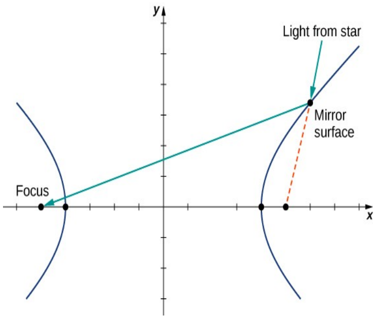
22. kép

A hiperbolikus paraboloidot tetők építésénél hasznosítják *(23.; 24. kép)*. Előnyös tulajdonságait a két irányba is görbült felülete adja. Ugyanis ez a görbült felület kisebb mértékben deformálódik, mint egy lapos, és a terheléseknek is jobban ellenáll. Esetükben sokkal kevesebb anyag felhasználásával el lehet érni a kívánt merevséget, mint egy lapos tető esetében.

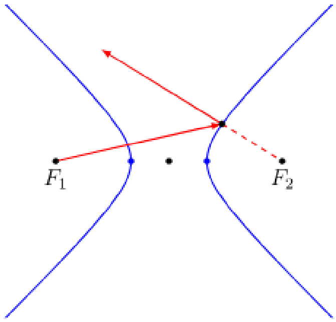
23. kép: A debreceni autóbusz-állomás hiperbolikus paraboloid szerkezetű teteje

24. kép: Hiperbolikus paraboloid szerkezetű tető. Ocota vasútállomás, Varsó

A kétköpenyű hiperboloidot az optikában használják fel, tükör formájában, illetve antennaként. Egy hiperbolaág metszetű tükör a következőképpen működik: a domború oldalára érkező fénysugarak közül azokat, melyek fókuszpontjának irányába tartanak, a másik fókuszpontba veri vissza *(25. kép)* (megfordítva: a hiperbola egyik fókuszpontjának virtuális képe a másik fókuszpont) (*26. kép*).



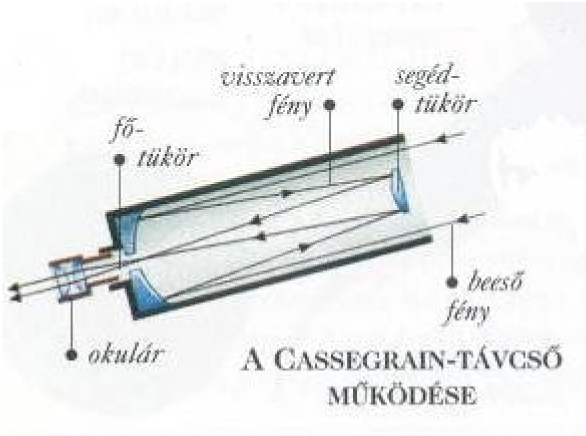
25. kép: A fókuszpont



26. kép: Az egyik fókuszpont virtuális képe a másik

Ezen tulajdonságát a hiperboloid tükröknek legtöbbször tükrös szerkezetű távcsövekben használják fel. Tükrös távcsöveket általában csillagászati célokra használnak. Feladatuk elsődlegesen minél több fény összegyűjtése a külvilágból, illetve a nagyítás. A fénysugarakat általában egy homorú felületű tükörrel gyűjtik össze, aztán egy segédtükörrel egy domború lencsére irányítják, ami elvégzi a nagyítást, így a megfigyelő már a nagyított képet szemlélheti.

A hiperboloid tükör segédtükörként jelenik meg többek között az úgynevezett Cassegrain -rendszerű távcsőben. Itt a főtükör szerepét egy paraboloid tükör tölti be, és a hiperboloid segédtükör fókuszpontja pedig egybeesik a paraboloid fókuszpontjával. Ilyenformán a fénysugarak a hiperboloid fókuszpontja felé vannak irányítva, tehát a segédtükörről a hiperbola másik fókuszpontjába lesznek visszaverve *(27. kép)*. Ezen fókuszpontot birtokolja a domború lencse is, ami az innen széttartó fénysugarakat párhuzamossá teszi, elvégezve a nagyítást. A Cassegrain –távcsőnek nagy előnye, hogy kis csőhosszúság mellett nagy tartományban lehet szabályozni a fénysugarak találkozási pontjának a helyét. [7]



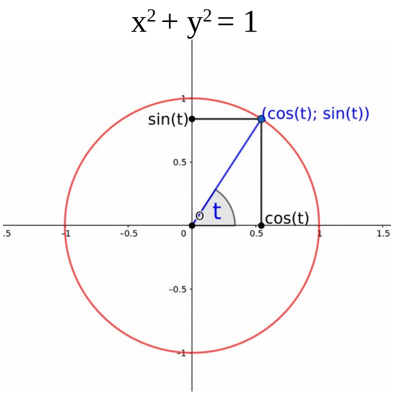
27. kép

Hiperbolikus függvények

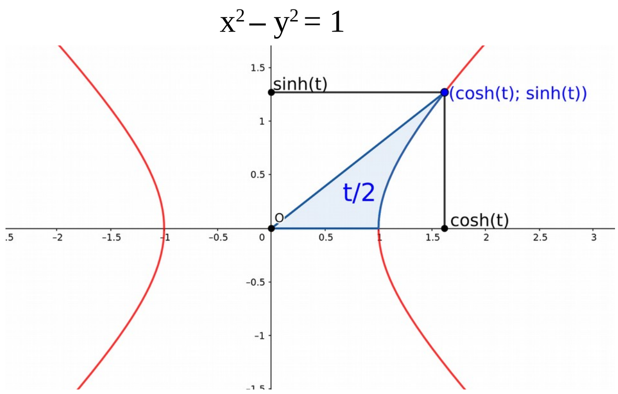
A trigonometrikus függvények értékeinek megállapítási módját mindannyian ismerjük: ha az $x^2+y^2=1$ egyenletű egységkörön választunk egy tetszőleges pontot, akkor annak a koordinátája az (x; y) koordináta-rendszerben (cos (*t*)*;* sin (*t*)) lesz, ahol *t* egy *forgásszög*, amit az x tengely, illetve az adott ponthoz az origóból húzott egyenes határoz meg *(28. kép)*. A (sin (*t*)*,* cos *(t)*) pontok ki is elégítik a kör egyenletét, hiszen a trigonometrikus azonosság alapján $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$.

Most azonban az egységkör helyett tekintsünk egy $x^2-y^2=1$ egyenletű egységhiperbolát! Pontosabban csak annak jobb oldali ágát. Jelöljünk ki ezen a hiperbola ágon egy tetszőleges pontot. Ezen pont koordinátáit amellett, hogy leolvashatjuk az x és y tengelyekről, megadhatjuk függvényekkel is: az egységhiperbolán kijelölt pont x koordinátája cosh *(t)*-vel, az y koordinátája pedig *sinh (t)* -vel lesz egyenlő.

A „sinh” és a „cosh” a függvények nevei, *hiperbolikus szinusznak (szinusz hiperbolikusz)*, illetve *hiperbolikus koszinusznak (koszinusz hiperbolikusz)* kell őket olvasni. A *t*, azaz a függvény argumentuma pedig az origóból az adott (cosh *(t);* sinh *(t)*) ponthoz húzott szakasz, az x tengely, illetve a az egységhiperbola által határolt *terület* kétszerese *(29. kép)*. Ezt a területet szokás „hiperbolikus szögnek” nevezni, habár semmi kapcsolata nincs a szögekkel.



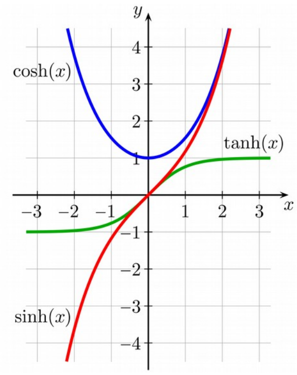
28. kép: Egységkör



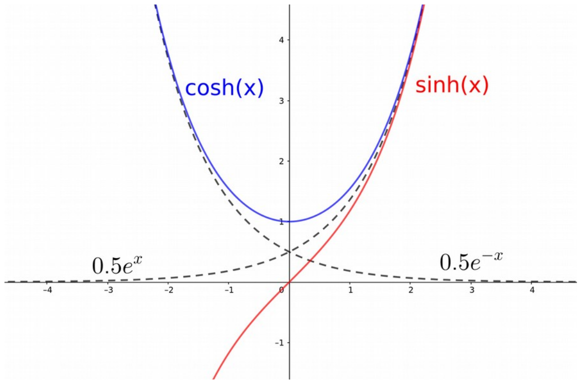
29. kép: Egységhiperbola

A hiperbolikus függvényeket először Vincenzo Ricatti és J. H. Lambert matematikusok mutatták be egymástól függetlenül az 1760-as években. A mai napig Ricatti elnevezéseit használjuk, ugyanis ő a trigonometrikus függvényeket „cirkuláris szinusz/coszinusznak” (*sinus/cosinus circular)*, a hiperbolikus függvényeket „hiperbolikus szinusz/koszinusznak” (*sinus/cosinus hiperbolico)* nevezte el, utalva az egységkörre, illetve az egységhiperbolára. Értelemszerűen azért kapták a hiperbolikus függvények a szinusz illetve a koszinusz elnevezést, mert az ő értéküket is ugyanúgy az y, illetve az x tengelyekről kell leolvasni, csak nem egy egységkör, hanem egy egységhiperbola felhasználásával. Ahogy a sin*(t)* és a cos*(t)* hányadosa a tangens, úgy a sinh*(t)* és cosh(t) hányadosa pedig a hiperbolikus tangens (tanh*(t)*) lesz. Léteznek még más, ezekből a függvényekből levezethető további hiperbolikus függvények, de azokba most nem megyünk bele.

Visszatérve a sinh*(t)* és a cosh*(t)* függvényekre, vizsgáljuk meg a tulajdonságaikat. Az egységhiperbolán látható, hogy míg a sinh*(t)* az y tengelyen felvehet negatív értékeket, a cosh*(t)* az x tengelyen csakis 1-nél nagyobb lehet. Továbbá a hiperbola szimmetrikussága miatt a sinh*(t)* és a cosh*(t)* grafikonja is szimmetrikus lesz, hiszen a egy adott intervallumot nézve az értékek növekvése/csökkenése egyenlő mértékű a hiperbola pozitív, illetve negatív tartományának szeletén. Ennek következtében a sinh*(t)* függvény páratlan, a cosh*(t)* függvény pedig páros lesz *(30. kép)*.



30. kép



31. kép

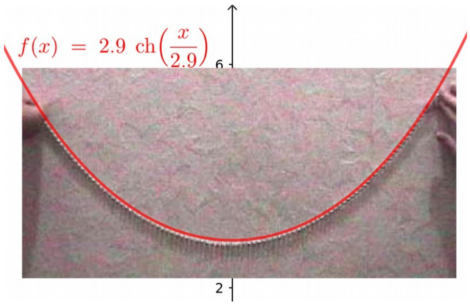
A tanh(*t*) függvény értéke pedig az origóból a (sinh(*t*); cosh(*t*)) ponthoz húzott szakasz meredekségével egyenlő. Értelemszerűen ennek a szakasznak a meredeksége nem lehet kisebb, mint -1, illetve nagyobb, mint +1, ugyanis ezek az értékek az egységhiperbola aszimptotáinak meredekségei, amit az origóból húzott szakasz nem léphet át. Tehát a hiperbolikus tangens egy páratlan, a mínusz végtelenben mínusz egyhez, a plusz végtelenben meg plusz egyhez tartó függvény lesz. A hiperbolikus függvények további fontos tulajdonsága, hogy felírhatóak exponenciális függvények összegeiként *(31. kép)*.

$$\sinh(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2} \qquad \cosh(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

Mivel (cosh(*t*); sinh(*t*)) pontok az $x^2-y^2=1$ hiperbolán helyezkednek el, ezért igaz rájuk az egyenlőség, hogy $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$. Ebbe az egyenletbe az exponenciális alakokat behelyettesítve, és a műveleteket elvégezve szintén 1-et kapunk.

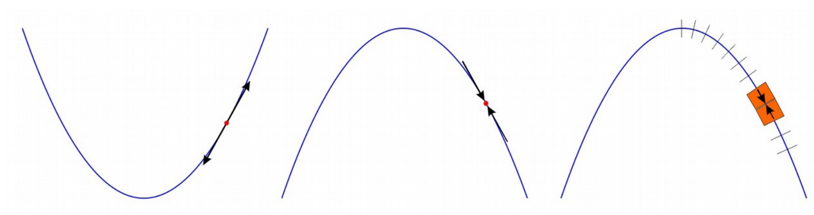
A hiperbolikus függvényeket a matematika és a fizika sok területén (differenciálegyenletek megoldása, hőátadás, relativitáselmélet) felhasználják. [8] Ezek részletezésétől – mivel már messze túlmutatnak a középiskolai tananyagon – most eltekintünk, helyette megint a hétköznapokban, azon belül építészetben tekintünk meg látványos megjelenési formát.

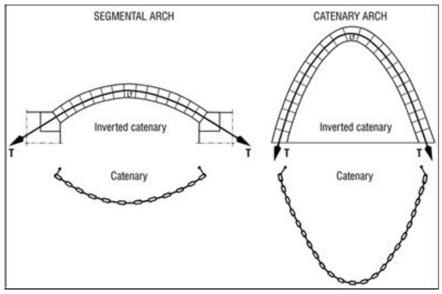
Vegyünk egy két végén felfüggesztett, súlya alatt lelógó láncot. Látható, hogy a lánc alakja valamilyen görbét formál. De milyen alakzat írja le ezt a görbét egy derékszögű koordináta-rendszerben? Galilei azt állította, hogy ez az alak egy paraboláé, ámde ezt az állítást 1669-ben megcáfolták. Csak a hiperbolikus függvények, illetve a differeciál számítás felfedezése után bizonyosodott be, hogy ezt az alakot – amit láncgörbének neveznek – a hiperbolikus koszinusz függvény fejezi ki. Egészen pontosan $y(t)=a\cosh\frac{t}{a}$ *(32. kép)*.



32. kép

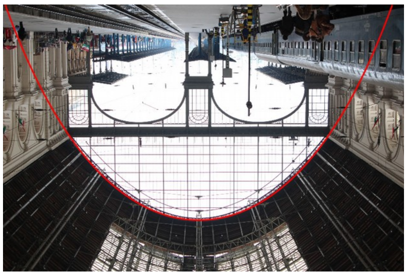
Ha szemügyre vesszük a lelógó lánc alakját, érdekes dolgokat fedezhetünk fel. A lánc mindegyik szemét két irányba húzzák szét a szomszédos szemek, továbbá a gravitációs erő az egész rendszert egy stabil, feszes, minimális helyzeti energiával rendelkező állapotba hozza. Ha láncot megfordítjuk, és szemeit merev elemekkel, például téglákkal helyettesítjük, akkor egy nagyon stabil építményt kapunk. Ebben az építményben mindegyik alkotóelemet nyomja két oldalról a vele szomszédos elem, és ezeknek az erőknek az iránya illeszkedik a megfordított láncgörbe alakjára *(33. kép)*. Ez az építmény pedig nem más, mint a saját súlyát tartó *boltív (34. kép)*.


33. kép: Feszültségek a láncgörbében



34. kép

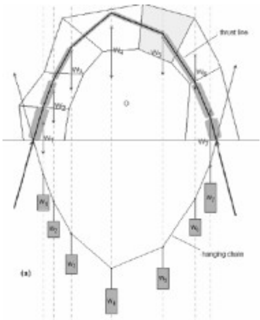
Boltíveket már az ókortól kezdve alkalmaznak különböző tetők, kupolák, hidak szilárd szerkezetének kialakításához *(35., 36., 37. kép)*. Természetesen az ókori és a középkori építészek nem tudatosan, hanem kísérletezés útján jutottak el a láncgörbét közelítő boltívekig. A tényt, hogy a szabadon álló boltív ideális alakja egyezik a saját súlya alatt lelógó láncéval, Robert Hooke angol fizikus állapította meg a 18. században. Fontos megemlíteni, hogy amennyiben a boltívnek a saját súlyán kívül más súlyt is viselnie kell, alakja eltér a láncgörbétől. Amennyiben a boltívet egyenletesen éri valamilyen ránehezedő terhelés, akkor az ideális alak a parabola.


35. *kép: Budapest, Keleti pályaudvar*


36. *kép: Sheffield, télikert*


37. *kép: Maisa Freixa, Spanyolország*

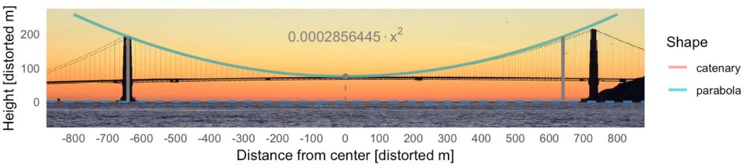
Gyakran előfordul, hogy a boltívet nem egyenletesen, szimmetrikusan éri a terhelés, hanem aszimmetrikusan. Ebben az esetben kicsit más alakban kell építeni a boltívet, mint alapesetben, értelemszerűen a nagyobb nyomás irányába „púposnak” kell lennie. Ezt a következőképpen lehet modellálni: a két végén felfüggesztett lógó lánc megfelelő pontjára a tervezett terhelésnek megfelelő súlyokat aggatnak, és az így eldeformálódott láncgörbe lesz a boltív alakja *(38. kép)*. Antoni Gaudí katalán építész gyakran alkalmazta ezt a módszert a barcelonai Sagrada Família katedrális *(39. kép)*, illetve más épületek tervezésekor. Az akkor készített bonyolult modelljei most is megtekinthetőek *(40. kép)*.


38. kép

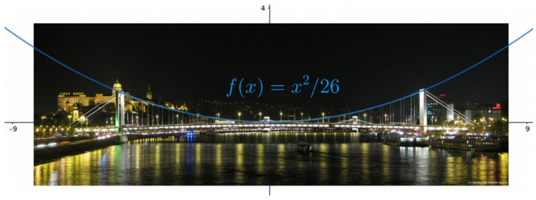

39. kép: A Sagrada Familia katedrális


40. kép: és a modellje

A láncgörbe íve felfedezhető függőhidaknál is, amennyiben magának a hídelemnek a súlya elhanyagolható a lánc súlyához képest. Azonban fontos megjegyezni, hogyha a hídelem súlyához képest hanyagolható el a tartólánc súlya (ilyen például a budapesti Erzsébet híd, vagy a san franciscói Golden Gate híd), akkor a tartólánc alakja nem láncgörbe, hanem parabola (*41.*, *42. kép*). [9]



41. kép: Golden Gate híd



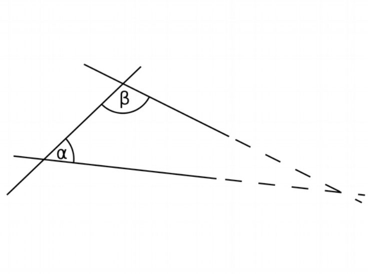
42. kép: Erzsébet híd

Hiperbolikus geometria

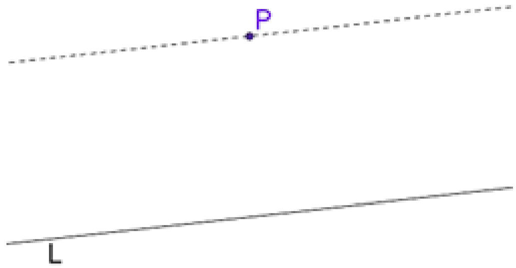
A geometria tudománya az ókorban fejlődött ki, valószínűleg egyiptomi földmérők munkája közben. Az idők során összegyűlt sok ismeret rendszerezésére többek között Eukleidész görög matematikus vállalkozott az i. e. 3. században. Eukleidész ezt az *Elemek* című könyvében tette meg. Ebben a tankönyvben Eukleidész lefektette a ma ismert, iskolában tanult geometria alapfogalmait, axiómáit, posztulátumait. A posztulátum egy olyan alapművelet a mértanban, ami egyszerűbb műveletre már nem vezethető vissza, ezért bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy az összetettebb műveletek elvégezhetőek legyenek (manapság már az axióma és posztulátum fogalma között nem tesznek lényeges különbséget). Eukleidész öt ilyen posztulátumot fogalmazott meg:

1. *Minden pontból minden ponthoz egyenes húzható*
2. *Az egyenes szakasz végtelenül meghosszabbítható*
3. *Minden pontból, mint középpontból tetszőleges sugarú kör rajzolható*
4. *A derékszögek egyenlőek*
5. *Ha két, azonos síkban fekvő egyenest egy harmadik metsz, akkor a két egyenes a harmadiknak azon az oldalán metszi egymást, amelyiken a keletkezett belső szögek összege két derékszögnél kisebb (43. kép).*

Az 5. posztulátum másik, az előzővel ekvivalens megfogalmazása a következő: „Egy egyenessel egy rajta nem fekvő ponton keresztül csak egy darab párhuzamos egyenes húzható.” *(44. kép)*



Az ötödik posztulátum



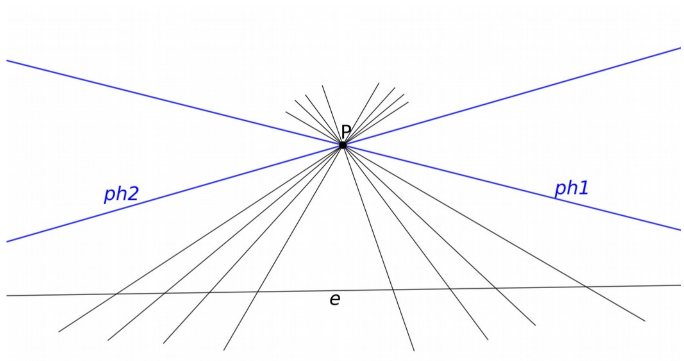
43. kép

44. kép

Mivel az ötödik posztulátum összetettebb, mint az első négy, ezért a matematikusok már az ókortól kezdve azt feltételezték, hogy ez lehet, hogy nem is alaptétel. Megpróbálták bizonyítani az első négy posztulátum segítségével – sikertelenül. Sokuk abból indult ki, hogy indirekt módon elvetette az ötödik alaptételt, és a többi axióma segítségével próbált meg ilyen módon ellentmondásra jutni. Azonban ezek a kísérletek már eleve kudarcra voltak ítélve, hiszen utólag már tudjuk, hogy az ötödik alaptétel független a többitől.

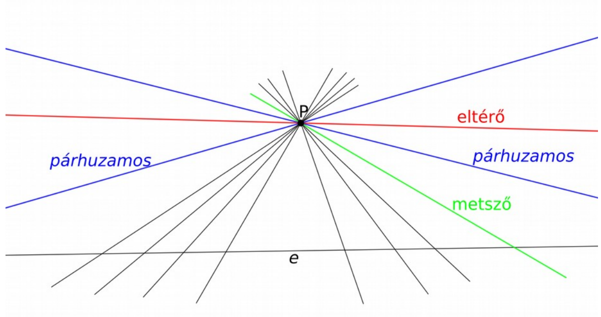
A „2000 éves probléma” megoldásában a magyar Bolyai János (1802-1860) és az orosz Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792-1856) ért el egymástól függetlenül áttörést az 1820-as évek végén. Ők abból indultak ki, hogy elvetették az ötödik axiómát, és felépítettek nélküle egy működő geometriai rendszert. Állításuk a következő volt: egy egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton keresztül végtelen sok párhuzamos egyenes húzható.

Hogy hozzuk létre ezeket az egyeneseket? Bolyai János a következőképpen fogalmazta meg *Appendix* című művében: *„Egy adott egyenesen kívül levő ponton át húzzunk egy másik, az előbbit metsző egyenest. Ebből a kiinduló helyzetből, a választott pont körül – mindvégig a közös síkban maradva – kezdjük el az egyenest az óramutató járásával ellentétes irányba forgatni. Ekkor szükségszerűen bekövetkezik egy olyan helyzet, amikor a forgatott egyenes legelőször nem metszi a rögzítve hagyottat. A pont körüli forgatás révén ilyen állásba került határegyenesről mondjuk azt, hogy párhuzamos a vele egy síkban levő másik egyenessel.” (45. kép)*



45. kép: Párhuzamosok

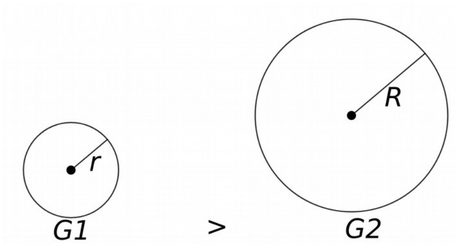
Ebben az esetben az egyenesek helyzete háromféle lehet: lehetnek metszőek, a határhelyzetben párhuzamosak, illetve a két határhelyzet közötti szögtartományban lévő egyeneseket meg ultrapárhuzamos, vagy eltérő egyeneseknek nevezzük *(46. kép)*. A geometriát pedig, amiben egy egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton keresztül végtelen sok párhuzamos húzható *hiperbolikus geometriának*, vagy más néven Bolyai-Lobacsevszkij geometriának nevezik. A „hiperbolikus” elnevezés a görög „hüperbolé” szóból eredeztethető, ami „többletet” jelent, utalva az egynél több párhuzamos egyenesre. [10]



46. kép: Az egyenesek lehetséges helyzetei a hiperbolikus síkon

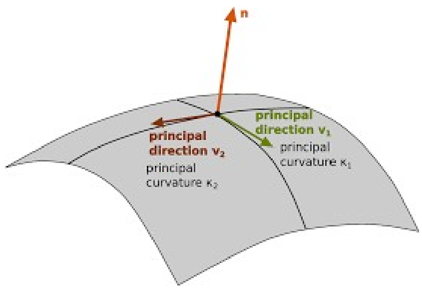
Nyilvánvaló, hogy ez a fajta párhuzamosság a tapasztalati, eukleidészi térben nem teljesül. Emiatt félre kell tennünk a hagyományos, euklideszi síkon történő szerkesztést, és helyette görbült felületeket kell igénybe vennünk. Rajtuk már létrehozható lesz a hiperbolikus geometria.

Ehhez azonban először ismerkedjünk meg a görbület, majd az előjeles Gauss-féle görbület fogalmával. Tekintsünk egy kisebb, és egy nagyobb sugarú kört. Látható, hogy a kisebb körvonala erősebben „kanyarodik” mint a nagyé, tehát a kisebbnek nagyobb a görbülete *(47. kép)*. Tehát minél nagyobb a kör sugara, annál kisebb a görbület, így a görbület jellemezhető az 1/R képlettel. A görbületet mindig egy adott pont környékén értelmezzük. Ilyenformán ez a mennyiség a körön kívül más görbék esetében is megállapítható. Ebben az esetben a görbéhez az adott pont környékén simuló körnek a sugarát kell számításba venni.

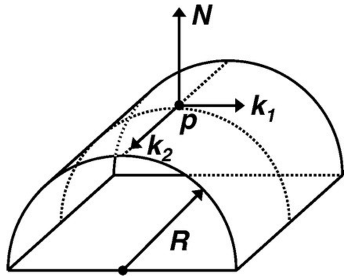


47. kép: Körök görbületei

Vegyünk egy felületet, példának okáért egy hengert! Válasszunk ki rajta egy tetszőleges pontot. Húzzunk ebből a pontból egy felületre merőleges normálvektort. Most metsszük el a hengert egy normálvektorra illeszkedő síkkal, és kezdjük el körbeforgatni a síkot a vektor körül. Különböző síkmetszeteket kapunk (ellipszis, két párhuzamos egyenes, kör) amiknek a választott pont környezetében különböző görbületük lesz. Válasszuk ki ezek közül a legnagyobb, illetve a legkisebb görbülettel rendelkező síkmetszetet. Ezeknek a síkmetszeteknek az adott pontban vett görbülete lesz a két főgörbület, amik Gauss egyik tétele szerint merőlegesek egymásra *(48. kép)*. A henger esetében a minimális főgörbület az párhuzamos egyenesek síkmetszetén (értéke: 0) a maximális főgörbület pedig a kör metszeten található (értéke: 1/R) *(49. kép)*. A két érték szorzata adja meg a Gauss-féle görbület értékét, ami ebben az esetben 0.



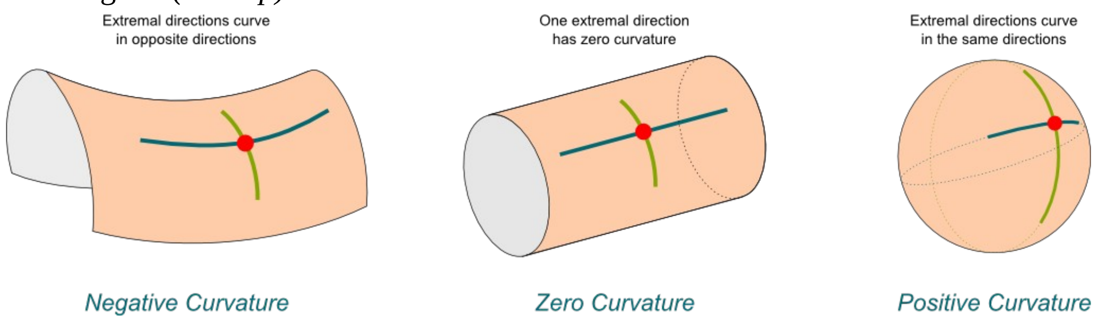
48. kép: A főgörbületek merőlegesek egymásra egy pontban



49. kép: Egy hengerfelület pontjának főgörbületi irányai

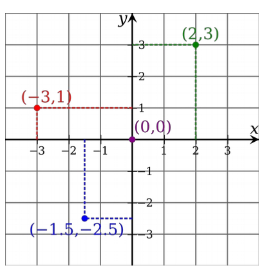
Pozitív görbületű felületre jó példa a gömb, aminek bármelyik pontjában a minimális és a maximális főgörbület értéke 1/R. Mivel a két görbület „egy irányba néz”, ezért előjelük megegyezik, így a gömb Gauss-féle görbülete $1/R^2$ lesz.

Negatív görbületű felületre pedig a korábban említett hiperbolikus paraboloidot, a nyeregfelületet hoznám példának. Tekintsük azt a pontot, amelyiknek az érintősíkja vízszintes, és a felületből két egymást metsző egyenest metsz ki. Ha ebben a pontban meghatározzuk a két főgörbületet, azt tapasztaljuk, hogy a két görbület „ellentétes irányba néz”, tehát előjelük ellentétes, így szorzatuk negatív *(50. kép)*.



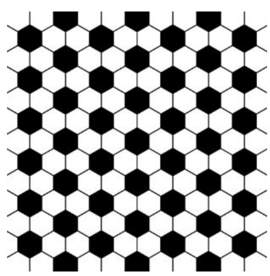
50. kép: negatív, nulla, és pozitív görbületek

Az eukleidészi síkon, aminek minden pontjában nulla a Gauss-féle görbülete, érvényesül a párhuzamossági axióma. Ha ezt a síkot csempézni szeretnénk (többféle egyenlő oldalú sokszöggel hézag nélkül lefedni a területét), azt megtehetjük olyan sokszögekkel, amik egymás mellé illesztve pontosan 360°-ot adnak ki. Jó példa erre a négyzetekkel, illetve a hatszögekkel való csempézés *(51., 52., 53. kép)*.



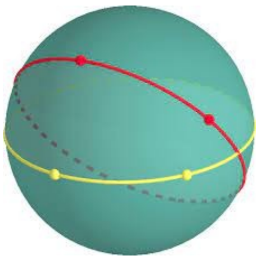
51. kép

52. kép: M.C. Escher: Plane with birds

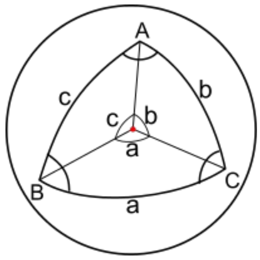


53. kép: Csempézés hatszögekkel

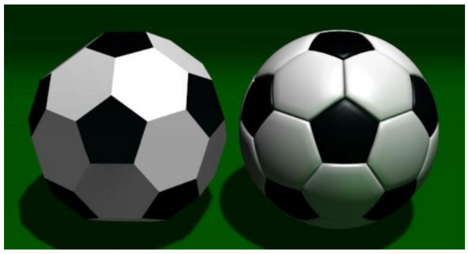
Ha szerkesztéseinket a nulla görbületű sík helyett egy konstans pozitív görbületű gömbfelületen végezzük, akkor érdekes dolgot tapasztalhatunk. Mivel a gömbfelületen két adott pontot összekötő legrövidebb szakasz a gömb főkörén halad végig, ezért az egyenesek is a főkörökre illeszkednek, és önmagukba záródnak, ahogy maga a felület is. Ilyenformán azonban bármely két egyenes két pontban metszeni fogja egymást, így a gömbi síkon nem érvényesül a párhuzamossági axióma *(54. kép)*. Az olyan geometriát tehát, amiben egy egyenessel egy rá nem illeszkedő ponton keresztül nulla párhuzamos egyenes húzható, gömbi, azaz elliptikus geometriának nevezzük. A gömbfelület csempézési módjára jó példa a focilabda, ami ötszögekből és hatszögekből van összevarrva *(56. kép)*. Azért lehetséges ez a csempézés, mert két hatszög és egy ötszög egymás mellé illesztve kisebb szöget fed le, mint 360° *(55. kép)*. A gömbi síkon a háromszögek első szögeinek összege nagyobb, mint 360°.



54. kép: Egyenesek a gömbi síkon



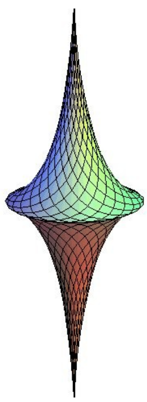
55. kép: Gömbi háromszög

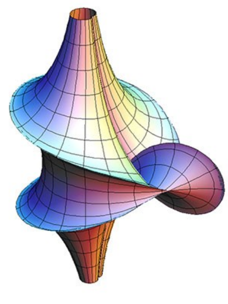


56. kép: A gömbi sík csempézése

Amennyiben konstans pozitív görbületű felület helyett konstans negatív görbületű felületet használunk szerkesztéshez, akkor a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómáját fogjuk tapasztalni. Azonban hogy kell elképzelni egy felületet, aminek minden pontja ugyanolyan negatív értékű görbülettel rendelkezik? Néhány helyen a nyeregfelületet hozzák fel példának a hiperbolikus síkra, azonban a nyeregfelület pontjainak görbülete – bár mindenhol negatív – nem konstans.

Akkor lehet-e találni az eukleidészi térben valós függvénnyel leírható, végtelen nagyságú, konstans negatív görbületű felületet? Sajnos nem. Hilbert német matematikus 1901-ben bebizonyította, hogy a végtelen hiperbolikus síkot lehetetlen az eukleidészi térbe átemelni. [11] Bár léteznek konstans negatív görbületű, függvénnyel leírható felületek (pszeudoszféra, Kuen-felület), ám azoknak kiterjedésük véges, így a végtelen hiperbolikus sík reprezentálására nem alkalmasak *(57, 58. kép)*.





57., ill. 58. kép: A pszeudoszféra és a Kuen-felület

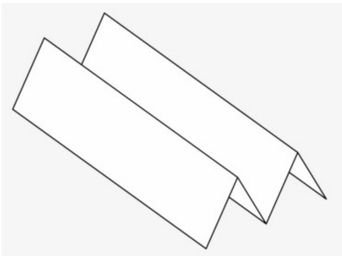
Azonban szerencsére léteznek az eukleidészi térben a hiperbolikus sík nagyobb (de nem végtelen) szeletét közelítő formák, amik nagyban segítik a megértést. Az egyik ilyen forma a csempézéssel érhető el, olyan módon, hogy szabályos hétszögek köré szabályos hatszögeket ragasztunk, így bármelyik három illeszkedésnél a szögek összege nagyobb lesz, mint 360° *(59. kép)*. A másik közelítő forma a Daina Taimina lett matematikus által 1997-ben megalkotott horgolt hiperbolikus sík modell *(60., 61. kép)*. Ezek az absztrakciók megközelítőleg izometrikusak a hiperbolikus síkkal, ami annyit tesz, hogy a hiperbolikus síkon bármely bejárt útvonal egyenlő hosszú az absztrakción bejárt útvonallal. Jól látható rajtuk a negatív görbületű sík egyik fontos jellemzője: míg a pozitív görbületű gömb önmagába záródik, ez pont az ellenkezőjét műveli. Az ilyen felületeken a háromszögek belső szögeinek összege kisebb, mint 180°.

59. kép: A hiperbolikus sík csempézése

60. kép: Horgolt modell

61. kép

Bár első ránézésre mindkét forma kezelhetetlennek tűnik az össze-vissza fodrozódása miatt, mégis lehet őket hasznosítani. Ugyanis egy eukleidészi síkot reprezentáló formán, a papírlapon úgy tudunk egy egyenest létrehozni, hogyha meghajtjuk azt *(62. kép)*. Ugyanígy kell tenni a horgolt síkkal is: ahol meghajtjuk, ott egy egyenest határozunk meg ezen a korallra emlékeztető valamin. Ily módon létrehozhatóak rajta a metsző, a párhuzamos, és az eltérő egyenesek is *(63. kép)*. [12]



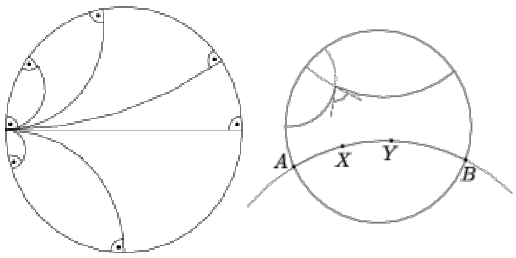
62. kép

63. kép: A horgolt modell hajtásvonalai mentén megjelölt hiperbolikus egyenesek

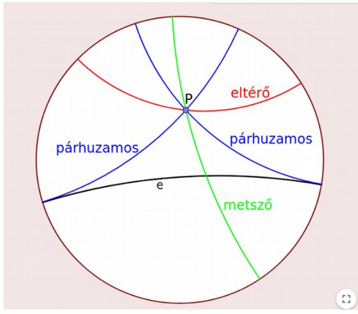
Geometriai modellek

Mivel – mint már említve volt – a hiperbolikus sík nem ágyazható be az eukleidészi térbe , ezért szükségünk van egy felületre, amin már tudunk mértani számításokat végezni. A választott felületen (vagy annak egy részén) pedig létre kell hozni egy olyan önkényes rendszert, amiben érvényesülnek a hiperbolikus geometria alaptételei. Az ilyen absztrakciót nevezzük modellnek. A modellek értelemszerűen nem magát a hiperbolikus síkot ábrázolják, hanem lehetővé teszik, hogy olyan rendszerben végezzünk szerkesztéseket, melyben a hiperbolikus geometria elvei érvényesülnek.

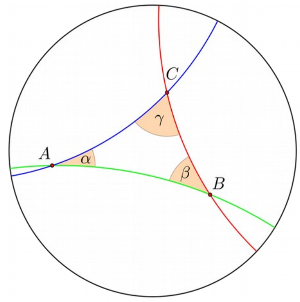
A Poincaré-féle körmodellen a hiperbolikus síkot egy, az euklideszi síkon megrajzolt kör reprezentálja. A modell határa, a körvonal a hiperbolikus sík végtelen távoli pontjait ábrázolja. Az egyenesek pedig olyan körívek, melyek a modell határát képező körvonalat derékszögben metszik *(64. kép)*. Ha két ilyen körív metszi egymást, az metsző egyeneseket jelöl; ha a modell határán találkoznak (egy végtelen távoli pontban) akkor párhuzamosak, ha pedig egyáltalán nem lépnek kapcsolatba, akkor eltérőek *(65. kép)*. Két egyenes által bezárt szög pedig a két körívnek a metszéspontjukban vett érintőinek a szöge. Ezen a modellen jól látszik, hogy a hiperbolikus síkon a háromszög belső szögeinek összege kisebb, mint 180° *(66. kép)*.



64. kép: Egyenesek és szögek

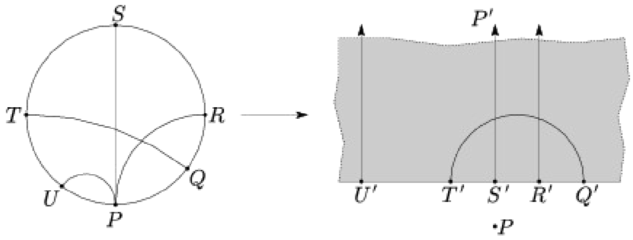


65. kép



66. kép: Háromszög

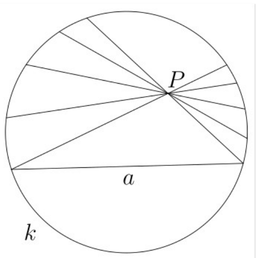
A Ponicaré – modellből kaphatjuk a félsík modellt, ahol a határkört úgymond „kinyitjuk” egy egyenessé. Ebben az esetben a sík a félsík lesz, a pontok a félsík pontjai, a végtelen távoli pontok pedig a határoló egyenesen elhelyezkedő pontok. Az egyenesek a határegyenest merőlegesen elmetsző körívek *(67. kép)*.

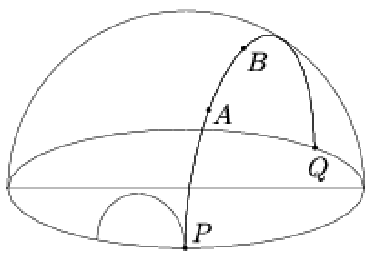


67. kép: Félsík modell

A Beltrami - Klein -féle körmodellen a sík szintén egy kör, és a sík végtelen távoli pontjai szintén a határkörön helyezkednek el. Az egyenesek ebben az esetben a kör húrjai. Két egyenes aszimptotikusan párhuzamos, ha a határkörön egy pontban érintkeznek *(68. kép)*. A Beltrami - Klein modell félgömbre való vetítésével kapjuk a félgömb modellt *(69. kép)*. Ezen a modellen a pontok a félgömbön helyezkednek el, a végtelen távoli pontok pedig a félgömb egyenlítőjén. Az egyenesek az egyenlítőt merőlegesen metsző gömbi vonalak. [13]

68. kép: Beltrami-Klein modell





69. kép: Félgömb modell

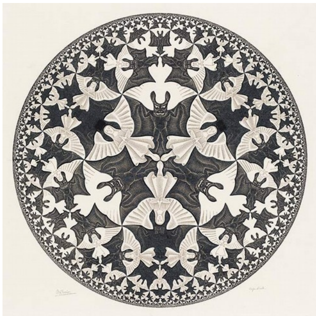
A hiperbolikus geometria jelentősége

Mielőtt Bolyai és Lobacsevszkij megalkotta volna a hiperbolikus geometriát, a geometria és valóság egymástól elválaszthatatlan volt. A mértan csakis a tapasztalati világra korlátozódott, és az alaptételeit is ez alapján fektették le. A hiperbolikus geometria volt az első olyan zárt logikai rendszer, melynek nem volt közvetlen kapcsolata a valósággal, és axiómáit önkényesen fogalmazták meg. Habár ezen elméleti, mesterséges geometriát Bolyai és Lobacsevszkij életében még nem ismerték el (igaz, ők sem tudták bizonyítani az ellentmondásmentességét), néhány évtizeddel később 1868-ban az olasz Beltrami bebizonyította, hogy a hiperbolikus geometriában valóban nincs ellentmondás. Ez a felfedezés gyökeresen megváltoztatta a gondolkodást a geometriáról, és az axiómarendszerekről.

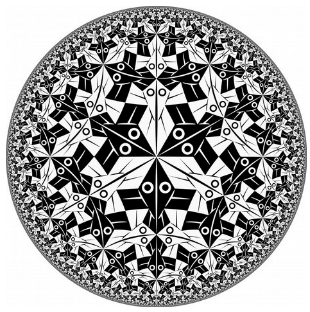
Természetesen ennek a geometriának az elméleti volta egyáltalán nem jelenti azt, hogy alkalmazhatatlan. A hiperbolikus geometriának sok felhasználása van a matematika és más tudományok különböző (általában magasabb) területein. A matematikában ilyen a diszkrét geometria, a topológia, komplex függvénytan és a csoportelméletek. A fizikában közvetlenül alkalmazzák a relativitáselmélettel kapcsolatos számításokban, továbbá a statisztikus fizikában is.

A művészetben is találkozhatunk a hiperbolikus geometriával. Erre jó példa Maurits Cornelius Escher holland festő művei, aki a végtelenül egymásba kapcsolódó, és síkot tökéletesen lefedő geometriai formákkal kísérletezett. Ugyanilyen mozaikos lefedést alkalmazott a Poincaré-féle körmodellen. A grafikákon jól látszik, ahogy az egybevágó alakzatok a modell egyenesei mentén elhelyezkednek, és a határkör felé konvergálnak *(70., 71., 72 kép)*. [14]

70. kép: Escher: Circle Limit III



71. kép: Escher: Circle Limit IV



72. kép: Escher: Circle Limit I

Zárszó

A cikk ezennel véget ér. Bízok benne, hogy sikerült egy érdekes összefoglalót megalkotnom a hiperbolák középiskolai tananyagon kívüli szerepéről, és az olvasó is új ismeretekkel gazdagodott. Végezetül még felhívnám a figyelmet egy fontos tényre: a cikk, habár terjedelmében viszonylag nagy lett, korántsem adott teljes körű ismertetést az említett témákról, és csakis a hiperbolát, a koordináta-geometria tananyag egyik alakzatát tárgyalta. Ha erről az egy alakzatról ennyi mindent el lehetett mesélni, akkor nyilván a koordináta-geometria és matematika többi témaköre is legalább ennyire kiterjedt. Ennek tükrében valljuk be, lenyűgöző belegondolni, hogy a matematika tudománya mégis mennyire gazdag.

Felhasznált irodalom:

[1]: https://www.komal.hu/cikkek/2004-11/kupszeletek1.h.shtml
[2]:[http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/LoranGPS/Navigation.html
[3]:https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_trajectory; http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1031142/FULLTEXT01.pdf (138. oldal a hiperbola pálya alakjáról)
[4]: https://www.komal.hu/cikkek/dandelin/hiperbola.h.shtml
[5]: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_04218/ch06s02.html ; https://mat.unideb.hu/sites/default/files/upload_documents/poszter_vva.pdf ; https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/Hyperbolic_paraboloid_in_construction

[6]: https://www.scienceabc.com/pure-sciences/why-cooling-towers-are-shaped-that-way.html
[7]: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_04218/ch06s02.html; Budó Ágoston: Kísérleti Fizika III. 101. oldal Tankönyvkiadó, Budapest, 1989
[8]: https://brilliant.org/wiki/hyperbolic-trigonometric-functions/
[9]: https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary
[10]: http://real.mtak.hu/60783/1/EPA00011_iskolakultura_2002_12_097-108.pdf ; https://videotorium.hu/hu/recordings/35710/relativitaselmelet-kozepszinten-10-1-kitero
[11]: https://bjlkeng.github.io/posts/hyperbolic-geometry-and-poincare-embeddings/
[12]: pi.math.cornell.edu/~dwh/papers/crochet/crochet.html ; https://www.youtube.com/watch?v=D-AHvZqbMT4; http://www.roguetemple.com/z/virtual-crocheting/virtual-crocheting.pdf
[13]: https://www.geogebra.org/m/NSQ9meGe
https://www.komal.hu/cikkek/2005-01/escher.h.shtml
[14]: http://www.termeszetvilaga.hu/tv2002/tv0209/prekopa.html

Képjegyzék:

1. kép: https://courses.lumenlearning.com
2. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
3. kép: http://www.jproc.ca
4. kép: https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_eccentricity
5. kép: mathpages.com
6. kép:http://ilmuku1510.blogspot.com
saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
7. kép: geogebra.org
8. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
9. kép: aapt.scitation.org
10. kép: hu.wikipedia.org
11. kép: https://demonstrations.wolfram.com
12. kép: pinterest.com
13. kép: http://abrgeom.uw.hu
14. kép: regi.tankonyvtar.hu
15. kép: pinterest.com
16. kép: sciencecenter.eu
17. kép: https://adoc.pub
18. kép: wikiwand.com
19. kép: wikidata.org
20. kép: https://archivum.mtva.hu + saját szerkesztésű hiperbola (online GeoGebra segítségével)
21. kép: livejapan.com + saját szerkesztésű hiperbola (online GeoGebra segítségével)
22. kép: pleacher.com
23. kép: visiekrimpenerwaard.nl
24. kép: en.wikipedia.org
25. kép: https://opentextbc.ca/calculusv2openstax/chapter/conic-sections/
26. kép: https://opentext.uleth.ca/apex-calculus/sec_conic_sections.html
27. kép: csillagaszat.hu
28. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
29. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával

30. kép: brilliant.org
31. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
32. kép: daviddarling.info + saját szerkesztésű hiperbolikus koszinusz függvény (online Geogebra segítségével)
33. kép: makingmathvisible.com
34. kép: twitter.com
35. kép: en.wikipedia.org
36. kép: en.wikipedia.org
37. kép: ca.wikipedia.org
38. kép: https://www.researchgate.net/figure/For-a-random-arched-structure-a-a-possible-thrust-line-and-its-equivalent-hanging_fig3_225587685
39. kép : papageno.hu
40. kép: pinterest.com
41. kép: https://staff.math.su.se
42. kép: https://hamster.blog.hu
43. kép: en.wikipedia.org
44. kép: cuemath.com
45. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
46. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
47. kép: saját rajz, készült online GeoGebra felhasználásával
48. 8ép: liavas.net
49. kép: ascelibrary.org
50. kép: bjlkeng.github.io
51. kép: https://verse-and-dimensions.fandom.com
52. kép: amazon.com
53. kép: zazzle.co.uk
54. kép: malinc.se
55. kép: en.wikipedia.org
56. kép: en.wikipedia.org
57. kép: mathworld.wolfram.com
58. kép: mathworld.wolfram.com
59. kép: math.tamu.edu
60. kép: xsead.cmu.edu
61. kép: theiff.org
62. kép: pngitem.com
63. kép: SciTech blog – CNN
64. kép: komal.hu
65. kép: saját szerkesztés, készült Szilassi Lajos GeoGebra modelljének felhasználásával (https://www.geogebra.org/m/NSQ9meGe)
66. kép: saját szerkesztés, készült Szilassi Lajos GeoGebra modelljének felhasználásával (https://www.geogebra.org/m/NSQ9meGe)
67. kép: komal.hu
68. kép: owlapps.net
69. kép: komal.hu
70. kép: en.wikipedia.org
71. kép: wikiart.org
72. kép: wikiart.org