## Magyar Ifjúság (Rábai Imre)

Az előző években közöltük a Magyar Ifjúságban a közös érettségi-felvételi feladatok megoldását matematikából és fizikából. Tapasztaltuk, hogy igen nagy volt az érdeklődés lapunk e száma iránt. Évente körülbelül 25 000 fiatal készül matematikából és fizikából egyetemi, főiskolai felvételire, most nekik szeretnénk segítséget adni. Tervünk szerint hetente közlünk matematika és fizika feladatokat, melyek megoldása a következő számban jelenik meg. A feladatok kitűzése előtt tanácsokat is adunk a problémák megoldásához.

A sorozat szerkesztői, a feladatok összeállítói évek óta foglalkoznak egyetemi, főiskolai felvételi előkészítéssel, s jelenleg ezen a területen is dolgoznak. (Több, általuk és szerzőtársaik által összeállított, illetve szerkesztett matematika, fizika példatár jelenleg is kapható a könyvesboltokban.) Hasonlóan évek óta aktívan értékelik az írásbeli és szóbeli felvételi tapasztalatokat. Mindketten több évet tanítottak középiskolákban, s jelenleg a Budapesti Műszaki Egyetem oktatói.

A felvételi vizsgák egyik alapvető tapasztalata, hogy a felvételizők jelentékeny része nem tudja előre felmérni felkészültségét, tudását. Ezek keserű szájízzel távoznak a felvételiről, s kellemetlen emlékeket szereznek. Sok felvételiző hátrányos helyzetből indul. Közéjük tartoznak a régebben érettségizettek, akik a felejtésen kívül abban is hátrányban vannak, hogy nem elég rendszeres a felkészülésük. Még több segítséget igényelnek azok, akik esti vagy levelező úton végezték középiskolai tanulmányaikat. Ők – idő hiányában – csak a legalapvetőbb ismeretekkel tudtak foglalkozni, s ez rendszerint igen kevés a felvételi követelményekhez. A szakközépiskolákban tanulóknak is van hátrányuk a gimnáziumokban végzettekkel szemben, hiszen a heti óraszámuk matematikából és fizikából kevesebb, mint a gimnáziumban, így a megkívánt felvételi színvonal elérése további feladatok, problémák megoldását teszi szükségessé. Segíteni akarunk mindenkinek, aki igényli ezt. Természetesen nem tudunk mindenben segítséget nyújtani. Az elméleti alapismereteket, amelyek minden középiskolai tankönyvben megtalálhatók, mindenkinek előbb át kell tekintenie. Hely és idő hiányában nyilván nem tudunk minden anyagrésszel egyenlő súlyban foglalkozni, és valószínű, hogy nem mindenki számára elegendő a felkészüléshez az általunk feladott problémák megoldása.. Az ő számukra feltétlenül ajánljuk a tankönyvekből, példatárakból való külön munkát!

Induló sorozatunk első feladatai igencsak hasonlítanak az írásbeli felvételin feladottakra. Javaslatunk: olvasóink kíséreljék megoldani ezeket, figyeljék, hogy mennyi időbe kerül a megoldásuk, hiszen matematikából és fizikából is 180 perc áll rendelkezésre az írásbelin. Ha most még jó néhányan kevés feladattal tudnak is megbirkózni, ne keseredjenek el, hiszen a továbbiakban rendszeresen átismételjük a középiskolában tanultakat, és így mód kínálkozik arra, hogy a hiányokat pótolják és rendszeres munkával készüljenek a felvételire. Kezdjük hát!

## Magyar Ifjúság 1.

**M. 1.** Egy téglalap egyik oldalát 10%-kal növeljük, a szomszédos oldalát 10%-kal csökkentjük. Az így kapott szakaszokból ismét téglalapot szerkesztünk. Megegyezik-e a két téglalap területe?

**M. 2.** Döntsük el, hogy a következő két szám közül melyik a nagyobb:

$$a=\left(\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt{6}\right):\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right),$$

$$b=\left(\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{6}\right):\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

**M. 3.** Oldja meg a következő egyenleteket:

**a)** $2x+9=\dfrac{(x+4)(x-1)}{x^2+3x-4}$;

**b)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

**c)** $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{x+4}\sqrt{x-1}$.

**M. 4.** Adott aderékszögű háromszög átfogója, $c$, és tudjuk, hogy háromszorosa a hozzá tartozó magasságnak. Fejezze ki $c$-vel a befogókat!

**M. 5.** Egy háromszög csúcspontjai: $A(–1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 3)$. Hol helyezkednek el a síkon azok a $P$ pontok, amelyekre $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 20$? $(= a^2)$

**M. 6.** Oldja meg a következő egyenletet:

$\lg(x + 10) + \dfrac{1}{2}\lg x^2 = 2 – \lg 4$.

**M. 7.** Az $a$ paraméter mely értékeire lesz az
$\lg [ax^2 + (a + 1)x + a + 1]$
kifejezés minden $x$ számra értelmezhető?

**M. 8.** Az $ABC$ háromszögön belül vegyünk fel egy tetszés szerinti $O$ pontot. Az $O$ ponton át a háromszög oldalaival húzzunk párhuzamos egyeneseket. Ezek az egyenesek az $ABC$ háromszöget hat részre osztják, melyek közül 3 háromszög. E háromszögekbe írt körök sugarai $r_1$, $r_2$, $r_3$, az $ABC$ háromszögbe írt kör sugara $r$. Igazolja, hogy $r_1 + r_2 + r_3 = r$!

## Megoldások az előző hétről

**M. 1.** Nem. A téglalap területe 1%-kal csökkent.

**M. 2.** $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $a > b$.

**M. 3. a)** Az egyenletnek nincs megoldása.

**b)** $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, ($k$ egész szám).

**c)** $x \geq 1$.

**M. 4.** $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}c$, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}c$.

**M. 5.** Az $x^2 + (y – 1)^2 = 4$ egyenletű körön.

**M. 6.** $x_1=-5+5\sqrt{2}$, $x_2 = –5$.

**M. 7.** $a>\dfrac{1}{3}$.

**M. 8.** Vegyük figyelembe, hogy a keletkezett háromszögek az $ABC$ háromszöghöz hasonlók, így a megfelelő szakaszok aránya megegyezik.

## I. EGYENLETEK

Ha két kifejezést egyenlőségjellel kapcsolunk össze, egyenletet kapunk. Egyenletet megoldani annyit jelent, hogy meghatározzuk az egyenlet gyökét, gyökeit, vagy megállapítjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása. Tekintsük a következő egyenleteket:

**a)** $x + 6 = 3x - 2$;
**b)** $x + 8 = 3x - 2\cdot(x - 4)$;
**c)** $2\cdot(4x - 8) + 4\cdot(5 - 2x) = 1$.

Az a) egyenletnek egyetlen megoldása van, $x = 4$. A b) egyenlet $0x = 0$ alakra hozható, minden valós szám megoldása, a valós számok körében azonosság. A c) egyenlet $0x = -3$ alakra hozható, az egyenletnek nincs megoldása.

Ha az egyenletben tört vagy gyökös kifejezés szerepel, akkor érdemes megállapítani, hogy ezeknek mikor van értelme, azaz milyen számok lehetnek az egyenlet gyökei. Az egyenletek megoldása során átalakíthatjuk az egyenlőségjel két oldalán álló kifejezéseket, így a kapott megoldásokról a végén el kell dönteni, hogy megoldásai-e az adott egyenletnek. Ezt sokszor célszerű ellenőrzéssel eldönteni, azaz az eredeti egyenlet két oldalán álló kifejezésekbe helyettesíteni. Ha e kifejezések helyettesítési értékei megegyeznek, akkor ez megoldása az egyenletnek, ha nem egyeznek meg, akkor nem megoldás.

**e)** $\dfrac{4-x}{x-3} - 2 = \dfrac{1}{x-3}$;
**f)** $(2x - 3)^2 = (x - 6)^2$;
**g)** $(2x + 1)(x - 3) = x - 3$.

Az e) egyenletnek nincs, értelme, ha $x = 3$. Az egyenletnek nincs is megoldása. Az f) és a g) egyenletet hozzuk nullára redukált alakra, alakítsuk szorzattá, majd használjuk ki, hogy egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Így az f) egyenlet $(3x - 9)(x + 3) = 0$ alakra hozható, a megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. A g) egyenlettel ekvivalens a $2x(x - 3) = 0$ egyenlet, így a gyökei $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Oldja meg a következő egyenleteket:

**M. 9.** $\dfrac{2x}{x-6} = 1 - \dfrac{x^2 - 5x - 18}{x-6}$.

**M. 10.** $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{12}{x^2-9} + \dfrac{2}{3-x} = 0$.

**M. 11.** $x + 3 = \dfrac{(x-1)(x+3)}{2x^2 - 5x + 3}$.

(Tanács: Alakítsa szorzattá a $2x^2 - 5x + 3$ polinomot!)

Az a) – c) példákban láttuk, hogy egy elsőfokú egyenletnek lehet hogy egy, lehet hogy végtelen sok megoldása van, s lehet, hogy nincs megoldása.

Oldjuk meg $x$-re és vizsgáljuk a következő betűegyütthatós egyenleteket:
**h)** $(a^2 - 2a - 8)x = a^2 - 16$;
**i)** $(a-1)x + \dfrac{a}{x} = 2a$.

**h)** Mivel $(a^2 - 2a - 8) = (a - 4)(a + 2)$, ezért $(a - 4)(a + 2)x = (a - 4)(a + 4)$.

Így ha $a \neq 4$ vagy $a \neq -2$, akkor az egyetlen megoldás: $x = \frac{a+4}{a+2}$; ha $a = 4$, akkor minden valós szám megoldás, míg ha $a = -2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

**i)** Az egyenletnek $x = 0$ nem lehet gyöke. Az $(a - 1)x^2 - 2ax + a = 0$ legfeljebb másodfokú egyenlet. Ha $a = 1$, akkor $x = \frac{1}{2}$. Ha $a \neq 1$, akkor a másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 4a^2 - 4a(a - 1)$. $D = 4a$. Az egyenletnek $a \geq 0$ esetén lehet valós gyöke. Ha $a = 0$, akkor $x^2 = 0$, így nincs megoldás; ha $a > 0$, akkor a megoldások:

$$x_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}.$$

Oldjuk meg és vizsgáljuk a következő egyenleteket:

**M. 12.** $\frac{2ax}{3} + 1 = \frac{a+x}{2} - 1.$

**M. 13.** $a(x - 1)^2 = x^2.$

**M. 14.** $ax - 2 = 4a - \frac{3+4a}{x}.$

**Megoldások az előző hétről**

**M. 9.** Az egyenletnek nincs értelme, ha $x = 6$. Az egyenlet $\frac{(x-6)(x+3)}{x-6} = 1$ alakra hozható. (Hogyan?) Az egyenlet egyetlen gyöke $x = -2$.

**M. 10.** Az egyenletnek nincs értelme, ha $x = 3$ vagy $x = -3$. Az egyenlet $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = 0$ alakra hozható. Az egyenlet egyetlen gyöke $x = 2$.

**M. 11.** $2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Az egyenletnek nincs értelme, ha $x = 1$ vagy $x = \frac{3}{2}$. Egyszerűsítsük a törtet, az egyenletet redukáljuk nullára, majd alakítsuk szorzattá. $(x+3)\left(1 - \frac{1}{2x-3}\right) = 0$. Az egyenlet megoldása: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

**M. 12.** $(4a - 3)\,x = 3a - 12$. Ha $a \neq \frac{3}{4}$, akkor $x_1 = \frac{3a-12}{4a-3}$; ha, akkor nincs megoldás.

**M. 13.** Az I. i) egyenlet erre az alakra hozható. Eltérés: ha $a = 0$, akkor az egyenletnek $x = 0$ (kétszeres) gyöke.

**M. 14.** $ax^2 - (4a + 2)x + 4a + 3 = 0$, $x \neq 0$. Ha $a = 0$, akkor $x = \frac{3}{2}$. $D = 4a + 4$. Ha $a < -1$, akkor nincs megoldás, ha $a = -1$, akkor $x = 1$ kétszeres gyök, ha $a > -1$, akkor $a_{1,2} = \frac{1}{a}\left(2a + 1 \pm \sqrt{a+1}\right)$.

## II. EGYENLETEK

A tanult meghatározás szerint $\sqrt{a}$ csak $a \geq 0$ esetén értelmezett és értéke sem lehet negatív $\left(\sqrt{a} \geq 0\right)$. Így bizonyos, négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenletekről azonnal eldönthető, hogy nincs megoldásuk.

**a)** $\sqrt{x-5} = 2 - x$.

**b)** $\frac{3}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$.

Az a) egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \geq 5$. Csak olyan $x$ szám lehet az egyenlet gyöke, amelyre $2 - x \geq 0$, azaz $x \leq 2$. Mivel olyan $x$ szám nincs, amelyikre $x \leq 2$ és $x \geq 5$, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

A b) egyenletnek csak $x > 0$ esetén van értelme, s ekkor a bal oldal mindkét tagja pozitív, ezért összegük is, tehát nincs megoldás.

**c)** $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

**d)** $\sqrt{x-5} = 11 - x$.

A c) egyenlet $\sqrt{x}$-re másodfokú. (Bevezethetnénk új változót is.) Mivel $\sqrt{x} \geq 0$, ezért e másodfokú egyenletnek csak a nem negatív gyöke jöhet számításba, ez 2. Így $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$.

A d) egyenletnek csak olyan gyöke lehet, amelyikre $5 \leq x \leq 11$. (Miért ?) Az egyenlet mindkét oldalának négyzetre emelésével nyert $x^2 - 23x + 126 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 9$, $x_2 = 14$. Az $x_1 = 9$ gyöke az adott egyenletnek, hiszen mindkét oldal helyettesítési értéke 2, az $x_2 = 14$ nem gyöke.

(Ha $\sqrt{x-5} = y$ jelölést vezetünk be, akkor $y \geq 0$ és $x = y^2 + 5$, így $y^2 - y - 6 = 0$, $y = 2$, $x = 9$.)

**M. 15.** $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 - x$.

**M. 16.** $\frac{3}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{1-2x}$.

**M. 17.** $\frac{3}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{1-2x}$.

**M. 18.** $\sqrt{4-x} + \sqrt{8-x} = \sqrt{x}$.

Tudjuk, hogy $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a > 0, \\ 0, \text{ ha } a = 0, \\ -a, \text{ ha } a < 0. \end{cases}$

**M. 19.** $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$.

**M. 20.** $\sqrt{4+4x+x^2}=-2-x$.

## Megoldások az előző hétről

**M. 15.** $x \geq 2$ és $x \leq 1$ kell, hogy teljesüljön, így nincs megoldás.

**M. 16.** Nincs megoldás, hiszen a bal oldal mindig pozitív, a jobb oldal pedig negatív.

**M. 17.** $x \geq 1$. Az egyenlet rendezése, majd mindkét oldal négyzetre emelése után az $x^2 + 19x - 120 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei (5, –24) közül csak az $x = 5$ a megoldása az adott egyenletnek.

**M. 18.** Valaki kitalálta, hogy $x = 4$ gyöke az egyenletnek. Hogyan tudná igazolni, hogy más gyöke nincs?

A $\sqrt{8-x}=\sqrt{x}-\sqrt{4-x}$ alakra hozott egyenlet mininkét oldalát négyzetre emeljük, majd nullára redukálunk és szorzattá alakíthatunk. A $\sqrt{4-x}\left(\sqrt{4-x}+2\sqrt{x}\right)=0$ alakról jól látható, hogy $x = 4$ lehet csak gyök, s ez valóban az.

**M. 19.** Mivel $\sqrt{a^2}=|a|$, ezért $|x - 1| = x - 1$.

Az egyenletnek minden olyan $x$ szám megoldása, amelyre $x - 1 \geq 0$, azaz $x \geq 1$. Próbálja az egyenletet grafikusan megoldani!

**M.20.** $|x + 2| = -(x + 2)$. A megoldások: $x \leq -2$.

## III. EGYENLETRENDSZEREK

Mindenki megismerte az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer alapvető megoldási módszereit, a helyettesítés és az egyenlő együtthatók módszerét. (Tekintsük át!) A grafikus megoldást is megismertük. Kevesebbet foglalkoznak általában az egyenletrendszerek megoldásának vizsgálatával. A grafikus megoldásból jól látható, hogy vagy egyetlen megoldás, vagy végtelen sok megoldás van, vagy pedig nincs megoldás.

**a)** Vizsgáljuk és oldjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=1, \\ 4x+ay&=b. \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből: $(a-2)y = b-2$. Ha $a \neq 2$ , akkor az egyenletrendszer egyetlen megoldása

$$y=\frac{b-2}{a-2}, \quad x=\frac{a-b}{2a-4}.$$

Ha $a = 2$ és $b = 2$, akkor végtelen sok megoldás van, hiszen a $2x + y = 1$ egyenlet megoldásai egybeesnek a második egyenlet megoldásaival. A megoldások: $x = t$, $y = 1 - 2t$, ahol $t$ bármely valós szám lehet. Ha $a = 2$ és b = 2, akkor nincs megoldás.

**M. 21.** $$\left.\begin{aligned} (a-1)x+y&=-1, \\ 2x-3y&=2. \end{aligned}\right\}$$

**M.22.** $$\left.\begin{aligned} (a+3)x+y&=3, \\ (7-a)x+(a-1)y&=-18. \end{aligned}\right\}$$

Ha a kétismeretlenes egyenletrendszer nem elsőfokú, akkor is a megismert módszerekkel kísérletezzünk. Tanácsoljuk az új változók bevezetését (ha szükséges), és esetleg az egyenlet nullára redukálása után a szorzattá alakítást.

**M. 23.** $$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+x+y&=14, \\ xy&=3. \end{aligned}\right\}$$

**M. 24.** $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}&=\frac{13}{6}, \\ x^2+y^2&=13. \end{aligned}\right\}$$

**M. 25.** $$\begin{aligned} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}&=10, \\ \sqrt{x^2-y^2}&=9. \end{aligned}$$

**M. 26.** $$\left.\begin{aligned} (x-1)(y-2)&=0, \\ x^2+2xy&=1. \end{aligned}\right\}$$

**M. 27.** $\left.\begin{array}{l} 2x-2y=x^2-y^2, \\ x^2+y^2=5(x+y). \end{array}\right\}$

**M. 28.** $\begin{array}{l} x-y+\sqrt{x-y}=6, \\ x^2+y^2=26. \end{array}$

**M. 29.** $\left.\begin{array}{l} x^2+x-y^2+y=8, \\ x^3+x^2y-xy^2-y^3=12. \end{array}\right\}$

## Megoldások az előző hétről

**M. 21.** Ha $a \neq \frac{1}{3}$, akkor az egyetlen megoldás $x=\frac{1}{1-3a}$, $y=\frac{2a}{1-3a}$. Ha $a=\frac{1}{3}$, akkor nincs megoldás, hiszen az első egyenlet $2x - 3y = -3$ egyenlettel egyenértékű.

**M. 22.** Ha $a \neq -5$ vagy $a \neq 2$, akkor az egyetlen megoldás $x=\frac{3}{a-2}$, $y=\frac{15}{2-a}$. Ha $a = -5$, akkor végtelen sok megoldás van; $x = t$, $y = 2t + 3$ alakúak. Ha $a = 2$, akkor nincs megoldás.

**M. 23.** $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$, $y_2 = 1$, $x_3=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$, $y_3=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $x_4=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $y_4=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

**M. 24.** Az egyenletrendszert négy $(x, y)$ számpár elégíti ki, (2; 3), (3; 2), (–2; –3), (–3; –2).

**M. 25.** $x_1 = 41$, $y_1 = -40$, $x_2 = 41$, $y_2 = 40$.

**M. 26.** $x_1 = 1$, $y_1 = 0$; $y_2 = 2$, $x_2=-2+\sqrt{5}$; $y_3 = 2$, $x_3=-2-\sqrt{5}$.

**M. 27.** Redukáljuk nullára az első egyenletet. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 5$, $y_2 = 5$, $x_3 = 3$, $y_3 = -1$, $y_4 = -1$, $x_4 = 3$.

**M. 28.** Az első egyenlet $\sqrt{x-y}$-ra másodfokú. $y_1 = 1$, $x_1 = 5$, $y_2 = -1$, $x_2 = -5$.

**M. 29.** $x_1=\frac{5}{2}$, $y_1=-\frac{1}{2}$. $x_2=\frac{19}{6}$, $y_2=\frac{17}{6}$.

## IV. MÁSODFOKÚ EGYENLETEK, POLINOMOK

Ha egy másodfokú egyenlet két gyöke $x_1$, $x_2$, akkor $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, ahol $a \neq 0$. Az $ax^2 + bx + c = 0$ (1) egyenlet legfeljebb másodfokú, ugyanis $a = 0$ is lehetséges. Ha $a \neq 0$, úgy az (1) egyenlet diszkriminánsa $D = b^2 - 4ac$. Az (1) egyenletnek akkor és csak akkor van gyöke a valós számok körében, ha $D \geq 0$. Az (1) egyenlet két gyöke pontosan akkor egyenlő, ha $D = 0$. Ekkor a gyöktényezős alak: $a(x - x_1)^2 = 0$. Ha $D \geq 0$, akkor az (1) egyenlet $x_1$ és $x_2$ gyökei és az $a, b, c$ együtthatók között érvényesek a következő összefüggések: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény csak pozitív értéket vesz fel, ha $D < 0$ és $a > 0$, csak negatív értéket vesz fel, ha $D < 0$ és $a < 0$.

**a)** Határozzuk meg a „$b$” értékét úgy, hogy az $x^2 + (b + 1)x + b + 4 = 0$ egyenlet két gyöke egyenlő legyen!

**b)** Határozzuk meg „$a$” értékét úgy, hogy az $x^2 + (1 - 2a)x + 2a - 2 = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyökének kétszerese legyen! Számítsuk ki a gyököket is!

**c)** Adott az $(a - 1)x^2 - 2ax + a + 1 = 0$ egyenlet. Igazoljuk, hogy az egyenletnek minden valós „$a$” esetén van megoldása! Határozzuk meg „$a$" értékét úgy, hogy az egyenlet gyökei különböző előjelűek legyenek!

**d)** Az „$a$” paraméter mely értékeire lesz az $(a - 1)x^2 - 2(a- 1)x - (a + 1)$ polinom értéke minden $x$-re negatív?

**a)** $x_1 = x_2$, ha $D = 0$. Most $D = b^2 - 2b - 15 = 0$.
Ha $b = 5$, akkor $x_1 = x_2 = -3$, ha $b = -3$, akkor $x_1 = x_2 = 1$.

**b)** $D = (2a - 3)^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2a - 2$. Ha $x_1 = 2x_2$, akkor $1 = 4a - 4$, $a = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$;
ha $2x_1 = x_2$, akkor $a = 2$, $x_2 = 2$.
Vagy: $x_1 = x_2 = 2a - 1$, $x_1x_2 = 2a - 2$, s ha $x_2 = 2x_1$, akkor $3x_1 = 2a - 1$, $2x_1^2 = 2a - 2$, így $4a^2 - 13a + 10 = 0$, $a = 2$ vagy $a = \frac{5}{4}$.

**c)** $a - 1$ esetén $x = 1$. Ha $a \neq 1$, akkor $D = 4$, így valóban mindig van megoldás, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{a+1}{a-1}$. A gyökök különböző előjelűek, ha $\frac{a+1}{a-1} < 0$, azaz $-1 < a < 1$.

**d)** Ha $a = 1$, úgy a polinom állandó, $-2$, tehát negatív. A pontosan másodfokú polinom akkor lesz minden $x$-re negatív, ha $D = 4(a - 1)\cdot 2a < 0$ és $a - 1 < 0$, azaz ha $0 < a < 1$. Válasz: $0 < a \leq 1$.

**M. 30.** Adott az $x^2 - 2x - 2a - a^2 = 0$ egyenlet.

**a)** Igazolja, hogy az egyenletnek minden valós „$a$” esetén van valós megoldása.

**b)** Milyen „$a$” esetén van az egyenletnek két egyenlő megoldása?

**c)** Határozza meg az „$a$” értékét úgy, hogy az egyenlet egyik gyöke a másik gyökének háromszorosa legyen!

**d)** Határozza meg az „$a$” értékét úgy, hogy az egyenlet két gyökének összege 2 legyen, majd úgy, hogy a két gyökének szorzata 2 legyen!

**M. 31.** Az „$a$” paraméter mely értékeire lesz az $(a - 1)x^2 - 2\sqrt{6}\,x + a - 2$ polinom értéke minden $x$-re pozitív?

## Megoldások az előző hétről

**M. 30. a)** Mivel $D = 4(a+1)^2 \geq 0$, ezért igaz az állítás.
**b)** Ha $D = 0$, azaz $a = -1$, akkor $x_1 = x_2 = 1$.

**c)** $x_1 = a + 2$, $x^2 = -a$. Ha $x_1 = 3x$, akkor $a = -\frac{1}{2}$, ha $3x_1 = x_2$, akkor $a = -\frac{3}{2}$. Mindkét esetben $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$, s a két gyök $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

Más módon: Mivel $x_1 + x_2 = 2$, és $x_1x_2 = -2a - a^2$, ezért ha ($x_1 < x_2$ és) $x_2 = 3x_1$, akkor $4x_1 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{4} = -2a - a^2$, $a = -\frac{1}{2}$, vagy $a = -\frac{3}{2}$.

**d)** A két gyök összege minden „$a$" esetén 2, a két gyök szorzata egyetlen „$a$" esetén sem 2, hiszen a $-2a - a^2 = 2$ egyenletnek nincs megoldása.

**M. 31.** Ha $a = 1$, akkor a $-2\sqrt{6}x - 1$ értéke lehet negatív is. Ha $a \neq 1$, a polinom másodfokú, akkor $a - 1 > 0$ és $D = -4(a-4)(a+1) < 0$ együtt kell, hogy teljesüljön. Válasz: $a > 4$ esetén vesz fel a polinom minden $x$-re pozitív értéket.