Írások, előadások anyagai

Akkoriban ... az órák így zajlottak le: házi feladat ellenőrzés, gyakorlás, új anyag, feleltetés. Majdnem minden óra ugyanígy ment. Akkor még nem ismertem más tankönyveket. Nem tudtam, hogy milyen tankönyvek léteznek. Azóta sokkal jobban ismerem az akkori tankönyveket (például a Mérei-féle tankönyveket) is, amelyekből annak idején tanultam. Egyébként akkoriban is több tankönyvsorozat volt egy időben forgalomban. Úgy 25-30 évvel ezelőtt minden Magyarországon megtalálható középiskolai tankönyvet 1850-60-tól kezdve igyekeztem átnézni. Rengeteg olyan tankönyvet ismerek tehát, ami a múlt században íródott.

Szeretem a pedagógiai gondolataimat magam kitalálta szlogenek köré csoportosítani. (Ezek egy általam írt, átfogó matematika-módszertani könyvben fejezetcímek lennének.) Egyik szlogenem. „*Sok minden elveszett*" (majd még említek ilyen szlogeneket). Egy 1867-es tankönyvben felhívják a figyelmet egy hibára („előjeles távlat"), mondván, hogy ezt ne tessék elkövetni. Ez az ismeret bizony elveszett, mert nagyon sajnálatos módon néhány éve egy egyetemi felvételi feladat kitűzője az értékelő táblázatban elkövette ugyanazt a hibát, amitől az 1867-es könyv óvott. [...]

Nagyon sokan tudták, hogy ajándékként a régi matematika-tankönyveknek örülök a legjobban. Sokszor a szülők és a nagyszülők tankönyveit is elhozták, így ma már nagyon szép gyűjteményem van a régi matematikai tankönyvekből. De nemcsak a régi, hanem a külföldi matematika-tankönyvekből is, van francia, török tankönyvem is, van osztrák, német sorozat. Ha jön valaki külföldről, mindig azt kérem, hogy hozzon matematika-tankönyvet. Az elmúlt évben Izraelből kaptam egy héber nyelvű egyetemi tanulásra (felvételire) előkészítő, igen színvonalas, tanító példatárat, mely sok mindenben hasonlít az általam összeállítottakra. Egy tankönyvet tanulmányozva megállapítható, hogy milyen módszerrel íródott a könyv, milyen módszerrel használják a könyvet, és mi előnye van. Minden tankönyvben van jó, és minden tankönyvből a jót próbáltam ellesni.

Minden leendő tanárnak ajánlom, hogy gyűjtsék a könyveket! Nagyon sok mindent tanulhatnak belőlük. Nincs rossz tankönyv. Mert ami rossz lenne, abból azt lehet tanulni, hogy mit nem szabad csinálni. [...]

Volt egy osztályom, a Fazekasban érettségiztek. Most lesz a 40. évforduló és a 40. találkozó, mert minden évben találkoznak. Három hónappal előbb elkezdik szervezni, hogy mindenki el tudjon menni. Elvittem nekik tavaly néhány fényképet. Ezeket ők készítették rólam 40 valahány éve. Az egyiken úgy fotóztak le, ahogy mentem be az osztályba, a hónom alatt 6-8 könyvvel. Soha nem egy könyvvel mentem be. Ahhoz, hogy az ember jól átgondolja, amit csinálni akar, sok könyv kell. [...]

Vannak olyan könyvek, amelyeket én elengedhetetlenül fontosnak tartok leendő és aktívan tanító matematikatanárok számára. Ilyen Pólya György *A gondolkodás iskolája* című könyve és *A problémamegoldás iskolája* című kétkötetes könyve. Pólya György már elmúlt 70 éves, amikor *A problémamegoldás iskolája* című művét írta. Egy leendő matematikatanároknak tartott szemináriumsorozata anyagát adta közre ebben a könyvben, melynek célja az volt, hogy a leendő tanárokat megtanítsa arra, hogyan lehet a tanulók gondolkodási képességét fejleszteni. *A gondolkodás iskoláját* 16 nyelvre fordították le, és olyan sok példány fogyott el belőle, mint a ponyvaregényekből. A kínaiak milliós példányban adták el.

(Részletek *A matematikatanítás mestersége, Gondolat Kiadó, 2007.* c. könyvből.)

Rábai Imre: A matematikatanítás gyakorlatából

Meghatározott? Túlhatározott? Alulhatározott?

Feladatok

I.

1. (Egy klasszikus feladat) Egy $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai: $AB = 10$ és $CD = 6$ egység. Az EF szakasz párhuzamos AB-vel, és a trapézt úgy vágja ketté, hogy az $ABFE$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területének a harmada. Milyen hosszú az EF szakasz? (Felvételi feladat 1985.)

[Mennyi a trapéz területe?]

2. Egy körbe írt trapéz magassága 8 egység, szára a kör középpontjából $60°$-os szögben látszik. Mekkora a trapéz területe? (Felvételi feladat 1986.)

[Mennyi a trapéz átlói és szárai?]

II.

1. Adott egy háromszög egyik oldala, a, és a hozzá tartozó magasság, m_a. Számítsa ki a háromszög területét!

[Számítsa ki a másik két oldal hosszát!]

2. Adott egy trapéz két párhuzamos oldalának hossza és a trapéz magassága, a, c és m. Számítsa ki a trapéz területét!

[Számítsa ki a szárak és a középvonal hosszát!]

3. Egy négyszög átlói e és f, az átlók merőlegesek egymásra. Számítsa ki a négyszög területét!

[Számítsa ki a középvonalak hosszát és a négyszög szögeit!]

4. a) Egy háromszög egyik oldala 1 egység, az oldallal szemközti szög $30°$, a háromszög köré írt kör sugara 1 egység.

b) Egy háromszög egyik oldala 1 egység, az oldallal szemközti szög $30°$, a háromszög köré írt kör sugara $1{,}5$ egység.

c) Adott egy háromszög egy oldala, a, oldallal szemközti szög (α), és a köré írt kör sugara, r.

Számítsa ki mindhárom esetben a háromszög területét!

III.

1. Az $ABCD$ trapézba egy r sugarú kör írható ($AD \parallel BC$), BAD szög $60°$, az AC átló merőleges a CD oldalra, és felezi a BAD szöget. Mekkora a trapéz területe?

2. Adott egy háromszög két oldala, 15 és 12 cm, területe $45\ cm^2$. Milyen távol van a harmadik oldaltól az ezzel párhuzamos egyenes, amely a háromszöget két egyenlő területű részre osztja, ha a harmadik oldalhoz tartozó magasság $2:1$ arányban osztja a 15 és 12 cm hosszú oldalak által bezárt szöget?

Elemzés

Az utóbbi időben találkoztam olyan feladatokkal, amelyek túlhatározottak voltak, azaz a szükségesnél több adatot tartalmaztak. Ilyen például a **III. 1.** feladat. Egy trapéz „megadásához" általában négy (független) adatra van szükség, egy érintőtrapéz megadásához háromra. A feladatban *négy* feltétel szerepel. Ettől még lehetne megoldás, de most ellentmondók a feltételek, a feladat feltételeinek nincs megfelelő trapéz, a feladatnak nincs megoldása.

Szabad-e feladni ilyen feladatot? Természetesen szabad, sőt érdemes is, csak a következtetést le kell vonni! Tanítás során a **II. 4.** feladat kínálkozik alapfeladatnak. A **4. a)** feladatnak végtelen sok háromszög felel meg, a feladat túlhatározott ($a = 2r \cdot \sin\alpha$, $1 = 2 \cdot 1 \cdot \sin 30°$), így természetesen a terület nem számítható ki, a **4. b)** esetben is túlhatározott a feladat, a megadott adatok ellentmondók ($1 = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \sin 30°$), a feladatnak nincs megoldása.

Természetesen a példatárakban, felvételi-érettségi feladatok között találhatók **alulhatározott** feladatok, amelyek a meghatározáshoz kevesebb adatot adnak meg, de amit kérdez a feladat, ahhoz elegendők a feltételek.

Alappélda a **II. 1.** és a **II. 2.** feladat, hiszen a és m_a segítségével a háromszög területe egyértelműen meghatározható, végtelen sok ilyen háromszög létezik, a másik két oldal hossza nem számítható ki. A **II. 2.** feladat feltételeinek végtelen sok trapéz felel meg, mindegyiknek a területe $T = \frac{a+c}{2} m$.

A **II. 3.** feladat feltételeinek is („kétszeresen") végtelen sok négyszög felel meg, és mindegyiknek a területe $T = \frac{e \cdot f}{2}$.

Tapasztalható, hogy *egyes esetekben* egy alakzat területe az alakzat megadásához szükséges adatok számánál kevesebb adatból is kiszámítható (alapfeladat a **II. 1.**, **2.**, **3.**).

Érdemes megvizsgálni az **I. 1.** és **I. 2.** feladatokat. Az **I. 1.** feladatban az EF szakasz hosszát kell kiszámítani. A trapéz megadásához négy adat szükséges, itt három adat adott.

Jelölje m_1 az AB és az EF párhuzamos egyenesek távolságát, m_2 a DC és az EF párhuzamos egyenesek távolságát, és legyen $EF = x$, azaz három ismeretlenünk van, m_1, m_2 és x.

Több módon kaphatjuk, hogy

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{10-x}{x-6} \quad \text{és} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{6+x}{2 \cdot (10-x)},$$

tehát két ismeretlenünk van, x és $\frac{m_1}{m_2}$. Innen $x = \sqrt{\frac{236}{3}}$ és $\frac{m_1}{m_2} = \frac{10 - \sqrt{\frac{236}{3}}}{\sqrt{\frac{236}{3}} - 6}$.

Mivel $\frac{m_1}{m_2}$ kiszámítható, ezért most is („kétszeresen") végtelen sok, a feltételnek megfelelő trapéz létezik, de a kérdéses EF szakasz hossza minden esetben ugyanannyi.

Legyen az AB és BC egyenesek metszéspontja a G pont, azaz CDG a trapéz kiegészítő háromszöge. Ennek területét jelölje T. Ha az $ABFE$ trapéz területe t, akkor az $EFCD$ trapéz területe $2t$. A hasonló idomok területének arányára vonatkozó tétel alkalmazásával

$$\frac{2t+T}{T}=\frac{x^2}{36} \quad \text{és} \quad \frac{3t+T}{T}=\frac{10^2}{36},$$

ahonnan $x^2=\dfrac{236}{3}$, $x=\sqrt{\dfrac{236}{3}}$ és $\dfrac{t}{T}=\dfrac{16}{27}$ ($t=16r$, $2t=32r$, $T=27r$, $r>0$), azaz $t:2t:T=16:32:27$.

Ebben a megoldásban az EF szakasz hosszán kívül a részterületek aránya számítható ki.

Az **I. 2.** feladatban szereplő húrtrapéz meghatározottságához *három* adat szükséges, most *két* adat adott, alulhatározott a feladat, a terület (többféle módon) kiszámítható. $T=64\sqrt{3}$ területegység, a trapéz átlóinak hossza 16 egység, az átlók szöge 60°.

A feltételnek végtelen sok trapéz felel meg, a trapéz szárainak hossza nem számítható ki.

A **III. 2.** feladat (amelynek „**megoldását**" olvastam valahol) külön elemzést kíván. A feladat *túlhatározott*, a feladatnak nincs megoldása.

1) Adott egy háromszög két oldala, 15 és 12 cm, területe 45 cm^2...

A kérdéses háromszögben három független adatot adtunk meg. Ilyen háromszög létezik, méghozzá két ilyen háromszög van. (Legyen az ABC háromszögben $AB=15$ cm, $AC=12$ cm, $BAC\angle=\alpha$.)

Most $12\cdot 15\cdot \sin\alpha=2\cdot 45$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\alpha_1=30°$, $\alpha_2=150°$.

Ha $\alpha_1=30°$, akkor $BC\approx 7{,}57$ cm, BC oldalhoz tartozó magasság $m_a\approx 11{,}90$ cm; ha $\alpha_2=150°$, akkor $BC\approx 26{,}09$ cm, $m'_a\approx 3{,}45$ cm.

2) ... Milyen távol van a harmadik oldaltól az az ezzel párhuzamos egyenes, amely a háromszöget két egyenlő területű részre osztja, ha ...

Legyen az A csúcstól való távolság x_1, illetve x_2, a BC oldaltól való távolság (a szóban forgó távolság) d_1, illetve d_2, ahol $d_1=m_a-x_1$ és $d_2=m'_a-x_2$.

A hasonló idomok területére vonatkozó tétel szerint

$\dfrac{x_1^2}{m_a^2}=\dfrac{1}{2}$, $x_1=\dfrac{m_a}{\sqrt{2}}$, és $\dfrac{x_2^2}{m_a'^2}=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{m'_a}{\sqrt{2}}$, $x_1\approx 8{,}41$ cm, $x_2\approx 2{,}44$ cm, tehát $d_1\approx 3{,}48$ cm, $d_2\approx 1{,}01$ cm.

Eddig a feladat megoldható. Hogyan néznek ki a háromszögek?

Ha $\alpha_1=30°$, akkor (szinusztétellel) $\beta_1\approx 52{,}48°$ és $\gamma_1\approx 97{,}52°$. Azaz a γ_1 szög tompaszög.

Ha $\alpha_2=150°$, akkor $\beta_2\approx 13{,}29°$, $\gamma_2\approx 6{,}71°$.

3)... ha a harmadik oldalhoz tartozó magasság 2:1 arányban osztja a 15 és 12 cm hosszú oldalak által bezárt szöget?

Itt a gond! Ha $\alpha_1=30°$, akkor a szóban forgó magasságvonal bizony a háromszögön kívül halad, de *ha* belül haladna, akkor a két részszög kiszámítható, és ezek aránya meghatározott, nem adható meg, illetve ha éppen megadott, akkor van megoldás.

A teljes feladat tehát *ellentmondóan* túlhatározott, a feladatnak nincs megoldása.

RÁBAI IMRE
BME adjunktus, Budapest

Koordináta-geometriai feladatok megoldási módszereiről

Koordináta-geometriát hazánkban a középiskolákban több mint egy évszázada tanítanak. A tanítandó tananyag mennyiségében, felépítésében és módszerében az 1949-ben életbe lépő tanterv nagy változást hozott.[1] A most életbe lépő új tanterv további alapvető változásokat hoz, elsősorban a vektorok segítségével való felépítés miatt.

A koordináta-geometriai feladatok megoldásának két *alapvető* módszere van.

a) *Szerkesztés menetének követése*

A feladat által adott adatok segítségével megszerkesztjük a keresett alakzatot és a szerkesztés lépéseit számítással követjük.

A módszer előnye akkor mutatkozik, ha a szerkesztés könnyen, kevés lépésben végezhető. Egyenesre és körre vonatkozó feladatok során gyakori alkalmazás nyílik; ellipszis, hiperbola és parabola esetén már ritkábban.[2]

b) *Paraméteres vagy algebrai módszer*

A keresett vagy más alakzat(ok) egyenletében egy- vagy több ismeretlent paraméternek választunk, és a paraméterek számának megfelelően egy vagy több feltételi egyenletet írunk fel. A paraméterek meghatározása egyben a feladatok megoldását is jelenti. Ez utóbbi az *analitikus módszer.*

A módszer elsősorban akkor hasznos, ha a szerkesztés menete nem követhető, és akkor, ha a megoldás így egyszerűbb, kevesebb számítást igényel.

Természetesen a feladatok megoldása során gyakran mindkét módszer is alkalmazható ugyanannak a feladatnak egy megoldásában. (Megeshet, hogy bár két különböző módszerrel dolgozunk, a számítás teljesen megegyezik.)

A paraméteres módszer alkalmazására nevelni kell a tanulókat. Igen hasznos lehet egy feladat többféle megoldása, mely így a tanulók gondolkodási készségét fejleszti, és lehetőséget ad számukra a megismert különböző módszerek gyakorlására. Az egyes osztályok tanulóinak felkészültségétől függően egy feladatnak többféle módszerrel való megoldása szerepelhet az egyes fejezetek összefoglaló óráin, év végi, illetve érettségi ismétlés folyamán, sőt egyetemi felvételire előkészítő szakkörökön is. A tankönyv nem tartalmazhat minden olyan feladatot, amely tanórán feldolgozásra kerül, hanem a tanárnak kell hozni ilyen feladatokat.

A koordináta-geometriai feladatok megoldása során természetesen szabad alkalmazni az elemi geometria és trigonometria módszerét, sőt célszerű, ha a feladat megoldását az egyszerűbbé teszi. Megfordítva: elemi geometriai és számítási feladatok is megoldhatók a koordináta-geometria alkalmazásával.

Az eddig elmondottak illusztrálására szolgáljon néhány feladat.[3]

1: Bővebben Faragó László.„A koordináta-geometria tanításának módszertana"Tankönyvkiadó Vállalat 1957. és Hódi Endre „Az analitikus geometria tanítása" Kézirat, Budapest, 1952.

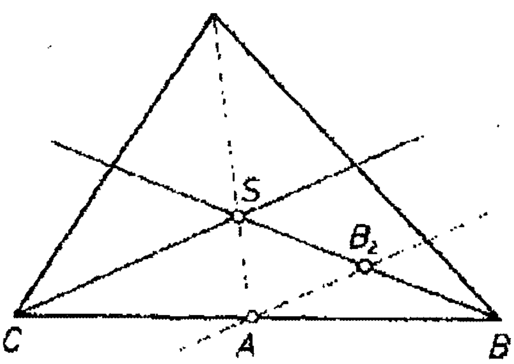
2: A szerkesztés menete követésével megoldható feladatok igen alkalmasak folyamatos ismétlésre és így elemi geometriai ismeretek ébren tartására.

3: A különböző módszerek bemutatására igen alkalmas Lukács Ernőné – Rábai Imre: Feladatok és megoldások c. könyvének 13. példája, 192. old. Gondolat Kiadó, 1968.

1. feladat

Ismeretes az ABC háromszög $A(-4;\,2)$ csúcsa és két súlyvonalának s_1-nek egyenlete $3x + 5y - 12 = 0$ és s_2-nek $3x - 2y + 2 = 0$. Határozzuk meg az oldalegyenesek egyenletét! (1. ábra.)

a) Az A pont koordinátái nem elégítik ki egyik súlyvonal egyenletét sem, így s_1 legyen a B csúcsponton áthaladó s_b, s_2 pedig a C csúcsponton áthaladó s_c súlyvonal egyenlete. Az s_b és s_c egyenesek $S\left(\frac{2}{3};\,2\right)$ metszéspontja a háromszög súlypontja. Legyen A_1 a BC oldal felezőpontja.



1. ábra

Ekkor $AS = 2SA_1$, így A és S koordinátái ismeretében A_1 koordinátái meghatározhatók: $A_1(3; 2)$. A háromszög a oldalegyenese az A_1 ponton átmenő olyan egyenes, amelynek s_b és s_c közé eső szakaszát az A_1 pont felezi. Ilyen egyenes egy és csakis egy létezik, és szerkesztésének egyik lehetősége a következő:[4] Az A_1 ponton át az: egyik (s_c) súlyvonallal húzott párhuzamos a másik súlyvonalat B_2 pontban metszi. Az S pontnak B_2 pontra vonatkozó tükörképe a háromszög B csúcspontja. A BA_1 egyenes a háromszög a oldala, a B csúcspontnak A_1 pontra vonatkozó tükörképe a háromszög C csúcspontja.

A szerkesztés lépéseit számítással kövessük.

Az A_1 ponton át s_c-vel párhuzamos egyenes egyenlete $y-2=\frac{3}{2}(x-3)$, ennek az s_b-vel. való metszéspontja $B_2\left(\frac{7}{3}; 1\right)$.

Tükrözzük az S pontot B_2 pontra, így a $B(4; 0)$ csúcspontot, valamint tükrözzük a B pontot A_1 pontra, így $C(2; 4)$ csúcspontot kapjuk. A háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

AB-é $x + 4y - 4 = 0$, *AC-é* $x - 3y + 10 = 0$, *BC-é* $2x - y - 8 = 0$.

4: Lásd: Matematika gimnáziumok és szakközépiskolák 11. osztálya számára. Tankönyvkiadó, 1967. 132. old. 2. példa.

b) Az előző megoldásban láttuk, hogy az A_1 ponton át olyan egyenest kell húznunk, amelynek az s_b és s_c közé eső szakaszát az A_1 pont felezi. Minden olyan egyenes, amely átmegy az A_1 ponton és nem párhuzamos az ordinátatengellyel $y-2=m(x-3)$ egyenlettel jellemezhető. Ezek közül kell megkeresni az adott tulajdonságút, hiszen könnyen ellenőrizhető, hogy az A_1 ponton átmenő és az ordinátatengellyel párhuzamos $x-3$ egyenes nem rendelkezik az adott tulajdonsággal. Vagyis az m paraméter egy bizonyos, a feltételeknek megfelelő értékét keressük. A paraméterek száma 1, így 1 feltételi egyenletre van szükség. Fejezzük ki az m paraméter függvényében az A_1 ponton átmenő sugársor és az s_b, illetve s_c egyenesek metszéspontjának koordinátáit. Elegendő csak az abszcisszákat meghatározni és alkalmazni a felezőpont meghatározására vonatkozó képletet. Az ordináták meghatározása és erre a képlet alkalmazása próbául szolgálhat. Az s_b, illetve s_c egyenessel való metszéspontok abszcisszája

$$x_1=\frac{15m+2}{3+5m}, \quad \text{illetve} \quad x_2=\frac{2-6m}{3-2m}.$$

A feltételi egyenlet

$$\frac{15m+2}{3+5m}+\frac{2-6m}{3-2m}=6.$$

(Az $m=-\frac{3}{5}$ és $m=\frac{3}{2}$ nem megoldása a feladatnak, így kizárható értékek.) Innen $m=-2$.

A BC oldalegyenes egyenlete tehát $y-2=-2(x-3)$, $y=-2x+8$. A B és C csúcspontokat a BC egyenes és az s_b, illetve s_c súlyvonalak metszéspontja adja.

c) Nem feltétlenül az az egyszerűbb megoldás, ha kevesebb paramétert választunk.

Válasszuk paraméternek pl. a C pont abszcisszáját (x),és a B pont ordinátáját (y).

$C\left(x; \frac{3}{2}x+1\right)$, $B\left(4-\frac{5}{3}y; y\right)$. Ekkor két feltételi egyenletre van szükség, amelyeket a felezőpont abszcisszája és ordinátája kiszámítására ismert képlet szolgáltat.

6

$$6 = x + 4 - \frac{5}{3}y$$

$$4 = \frac{3}{2}x + 1 + y.$$

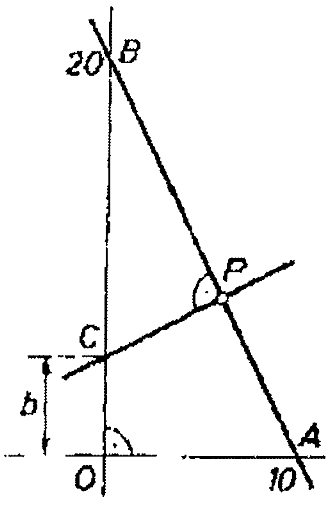
Az egyenletrendszer megoldása $x = 2$, $y = 0$, így $B(4;\ 0)$ és $C(2;\ 4)$.
Most ez a módszer a legegyszerűbb.

***

Feladatok megoldása során az elemi geometria tételeit is alkalmazhatjuk.

2. feladat

Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletet, amely merőleges a $2x + y = 20$ egyenesre és felezi az adott egyenes és koordinátatengely által határolt háromszög területét! (Egyetemi felvételi feladat, 1967.)



2. ábra

Az adott egyenes meredeksége $m = -2$, tehát a keresett egyenesé $m = \frac{1}{2}$. Válasszuk paraméternek a keresett egyenesnek az ordinátatengellyel való C metszéspontjának b ordinátáját!

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

A *2. ábrán* látható AOB és CPB háromszögek B csúcsnál fekvő szögük közös, tehát hasonlóak. Területeik aranya 2:1, így a megfelelő oldalaik aránya $\sqrt{2}:1$. A két derékszögű háromszög átfogója $AB = 10\sqrt{5}$, illetve $BC = 20 - b$ hosszegység.

A megfelelő arány miatt

$$(20 - b)\sqrt{2} = 10\sqrt{5}$$

$$b = 20 - 5\sqrt{10}.$$

A keresett egyenes egyenlete

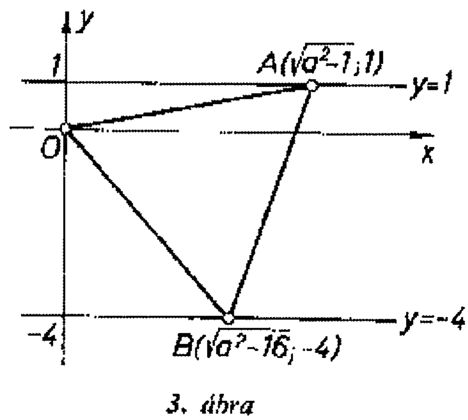
$$y = \frac{1}{2}x + 20 - 5\sqrt{10}.$$

***

Geometriai számítási feladatokat megoldhatunk koordináta-geometria segítségével is.

3. feladat

Rajzoljunk három párhuzamos egyenest úgy, hogy a középső a szélsőtől 1, illetve 4 cm távolságra legyen! Mekkora az olyan szabályos háromszög oldala, amelynek egy-egy csúcsa a három párhuzamoson helyezkedik el (II. osztályos tankönyv)?



3. ábra

Helyezzük el a három párhuzamos egyenest célszerűen a koordináta- rendszerben pl. úgy, hogy a középső essen egybe az abszcisszatengellyel (3. ábra). Ekkor a három egyenes egyenlete pl. $y = 1$, $y = 0$ és $y = -4$. A szabályos háromszög egyik csúcsa essen az origóba. Válasszuk paraméternek a háromszög oldalhosszát a-t.

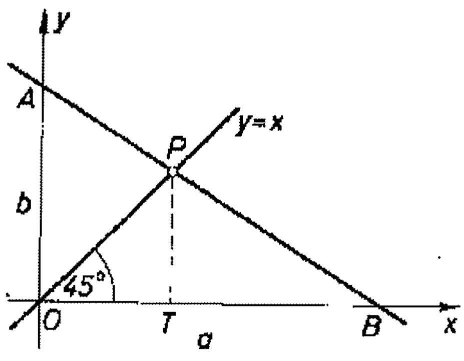
A háromszög másik két csúcspontja $A\left(\sqrt{a^2-1};1\right)$ és $B\left(\sqrt{a^2-16};-4\right)$. Mivel AB^2-d^2 azért

$$\left(\sqrt{a^2-16}-\sqrt{a^2-1}\right)^2+25=a^2,$$

$$a=\sqrt{28}.$$

4. feladat

Legyen a derékszögű háromszög átfogója 10 cm, a derékszög szögfelezője pedig $\dfrac{24\sqrt{2}}{7}$ cm hosszú. Mekkorák a befogók? (Egyetemi felvételi feladat, 1966.)



4. ábra

Helyezzük el a derékszögű háromszöget (AOB) a koordináta-rendszerben a 4. ábrán látható módon! Válasszuk paraméternek a keresett befogók hosszának mértékszámát cm-ben, a és b. Így a csúcspontok koordinátái $A(0;\, b)$; $B\{a;\, 0)$.

Az AB átfogó egyenlete $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, az OP szögfelező egyenlete $y=x$. A két egyenes P metszéspontjának koordinátái $x_P=y_P=\dfrac{ab}{a+b}$. Mivel $OP=\dfrac{24\sqrt{2}}{7}$ és OTP háromszög egyenlő szárú derékszögű, ezért

$$\frac{ab}{a+b}\cdot\sqrt{2}=\frac{24\sqrt{2}}{7}. \qquad (1)$$

A Pitagorasz-tételt alkalmazva

$$a^2+b^2=100.$$

Az (1) egyenletet rendezve és az $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ azonosságot alkalmazva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$7ab=24\,(a+b)$$
$$(a+b)^2-2ab=100.$$

A megoldás során a

$$7(a+b)^2-48(a+b)-700=0$$

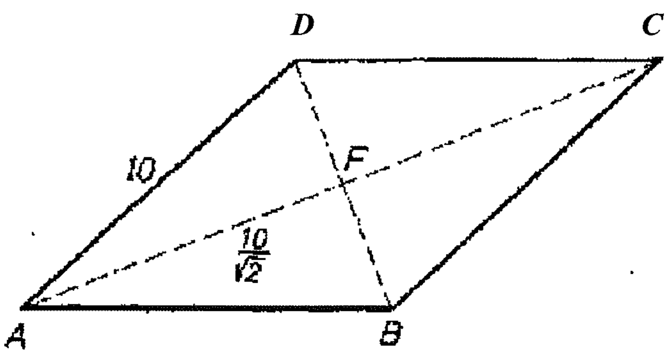
egyenlethez jutunk, s mivel $a+b>0$, ezért $a+b=14$ és $ab=48$, tehát a befogók hossza 6, illetve 8 cm.

***

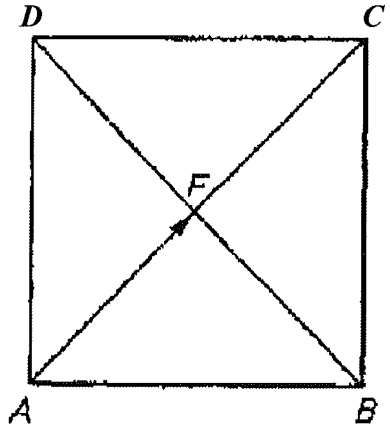
Az új tantervben az egymásra merőleges vektorok koordinátáira vonatkozó összefüggés alkalmazásával sok feladat egyszerűbben oldható meg. Példának szolgáljon az 1968. évi egyik érettségi feladat.

5. feladat

Az $ABCD$ rombusz két szemközti csúcsa $A(8;-3)$, $C(10;\, 11)$. A rombusz oldala 10 hosszúságegység. Határozzuk meg a B és D csúcspontok koordinátáit! (5. és 6. ábra.)



5. ábra



6. ábra

A rombusz A, illetve C csúcsába az $\mathbf{a}(8; -3)$, illetve $\mathbf{c}(10; 11)$ helyvektor mutat, tehát az AC átló F felezőpontjának $\mathbf{f}(9; 4)$ a helyvektora. Az AF hossza $\sqrt{50} = \frac{10}{\sqrt{2}}$, tehát az AFD derékszögű háromszög egyenlő szárú, így az $ABCD$ rombusz négyzet. A B és D pontok koordinátái megegyeznek a pontokba mutató **b** és **d** helyvektorok koordinátáival. Ezeket megkapjuk, ha az **f** vektorhoz hozzáadjuk az AF vektor pozitív, illetve negatív irányú 90°-os elforgatottját. Az $\overrightarrow{AF}(1; 7)$, így az elforgatott vektorok $(-7; 1)$ és $(7; -1)$. Kapjuk, hogy (az ábra szerint)

$\mathbf{b} = (9; 4) + (-7; 1) = (2; 5)$

$\mathbf{d} = (9; 4) + (7; -1) = (16; 3)$.

A keresett csúcspontok $B(2; 5)$ és $D(16; 3)$.

***

Az egyenes paraméteres vektoregyenlete és paraméteres egyenletrendszere teljesen új a középiskolás anyagban. Az utóbbi alkalmazásával sok feladat egyszerűen, illetve szokatlan módon oldható meg. Ha nem is mindig tanórán, hanem szakkörökön és szorgalmi feladatként érdemes gyakoroltatni, hiszen az egyetemen tanulandó egyparaméteres vektor-skalár függvények jó megértését készítik elő.

6. feladat

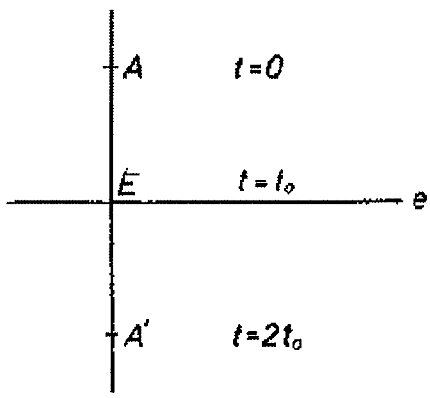
Tükrözzük az $A(-3; 7)$ pontot az $x + 3y = -12$ (e) egyenesre! Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit! (7. ábra.)

Az $x + 3y = -12$ e egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(-3; 1)$, így a rá merőleges egyenes egy irányvektora (az e egyenes egy normálvektora) $\mathbf{n}(-1; -3)$. Az A ponton áthaladó **n** irányvektorú egyenes *egy* paraméteres egyenletrendszere

$x = -3 - t$

$y = 7 - 3t$. (2)

Tekintsünk egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző pontot, amely a $t = 0$ időpontban az A pontban van, és sebességvektora $\mathbf{n}(-1; -3)$. (A negatív koordináták a haladási irányt határozzák meg,) Ha A' az A pont tükörképe az e egyenesre és E az e és AA' egyenesek metszéspontja, akkor a mozgó pont az AE és EA' távolságokat egyenlő idő alatt teszi meg.



7. ábra

Az AE szakasz megtételéhez szükséges t_0 időt megkapjuk, ha megkeressük, hogy a (2) egyenletrendszerrel jellemzett mozgó pont mely időpontban van az e egyenesen, azaz milyen t_0 mellett elégíti ki az e egyenes egyenletét.

$(-3 - t_0) + 3(7 - 3t_0) = -12$

$t_0 = 3.$

A mozgó pont az A' pontban a $t = 2t_0$, azaz $t = 6$ időpontban lesz, tehát az A' koordinátái

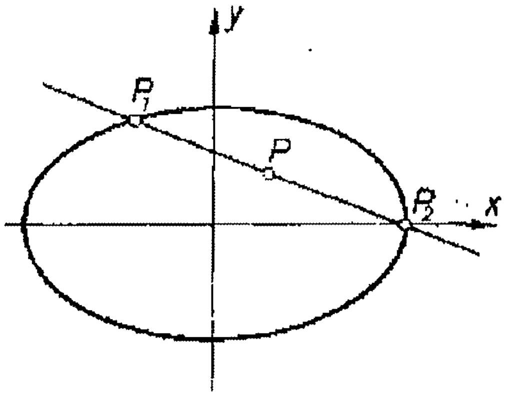
$x' = -3 - 6, \quad y' = 7 - 18.$ Így $A'(-9; -11)$.

7. feladat

Határozzuk meg annak a $P(1; 1)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amelynek az

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

ellipszisen belül eső szakaszát a P pont felezi! (8. ábra.)



8. ábra

Tekintsünk egy egyenes vonalú egyenletes mozgással haladó pontot, amely a $t = 0$ időpontban a $P(1; 1)$ pontban, $t = t_1$, illetve $t = t_2$ időpontokban pedig az ellipszis P_1, illetve P_2 pontjában van. Ha P a P_1P_2 szakasz felezőpontja és a pont egyenletes mozgást végez, akkor $|t_1| = |t_2|$ és egyik pozitív, másik negatív, tehát a két időérték egymás ellentettje: $t_1 = -t_2$, azaz $t_1 + t_2 = 0$.

A P ponton átmenő egyenesek *egy* paraméteres egyenletrendszere

$x = 1 + v_1t$

$y = 1 + v_2t,$

ahol $(v_1; v_2)$ a mozgó pont egy sebességvektora (az egyenes egy irányvektora).

A v_1 és v_2 paraméterek, amelyeknek arányát keressük.

A mozgó pont abban a t időpontban lesz az ellipszisen, amikor

$$4(1 - v_1t)^2 + 9(1 + v_2t)^2 = 36$$

$$(4v_1^2 + 9v_2^2)t^2 + (8v_1 + 18v_2)t + k = 0,$$

ahol $(4v_1^2 + 9v_2^2) \neq 0$, k pedig állandó. Ezen t-re másodfokú egyenlet gyökeinek összege nulla, $t_1 + t_2 = 0$. Ezért $8v_1 + 18v_2 = 0$, $9v_2 = -4v_1$.

A keresett egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(9; -4)$, így egyenletrendszere, illetve egyenlete:

$x = 1 + 9t$

$y = 1 - 4t$, illetve $4x + 9y = 13$.

Természetesen ez és az előző feladat is megoldható fizikai interpretáció segítsége nélkül is közvetlen paraméteres egyenletrendszer alkalmazásával is és előbb-utóbb a feladatokat úgy érdemes megoldani.

Térjünk vissza az 1. feladatra. A *b)* megoldásban keresett BC egyenes egy paraméteres egyenletrendszere

$x = 3 + v_1t$

$y = 2 + v_2t. \qquad (3)$

A t_0 paraméterhez az A_1 pont tartozik. A keresett B és C pontok olyan t_B és t_C paraméterértékekhez tartoznak, amelyek segítségével (3) kielégíti s_b, illetve s_c egyenletét, és $t_B = t_C$.

Így

$$3(3 + v_1t_B) + 5(2 + v_2t_B) - 12 = 0$$
$$3(3 + v_1t_C) - 2(2 + v_2t_C) + 2 = 0 \text{ ,}$$

ahonnan

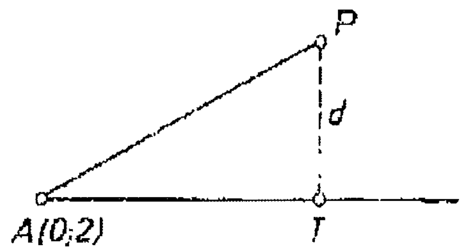
$$t_B = \frac{-7}{3v_1 + 5v_2} \quad \text{és} \quad t_C = \frac{7}{2v_2 - 3v_1}, \quad \text{tehát } 6v_1 = -3v_2.$$

$2v_1 = -v_2$.

Egy alkalmas irányvektor koordinátái $v_1 = 1$, $v_2 = -2$; az egyenes meredeksége $m = -2$.

8. feladat

Határozzuk meg a $P(1; 9)$ pontnak a $3x - 4y = -8$ egyenestől való távolságát! (9. ábra.)



9. ábra

Az adott egyenes egy pontja $A(0; 2)$, egy irányvektora $\mathbf{v}(4; 3)$, így egy paraméteres egyenletrendszere

$x = 4t$

$y = 2 + 3t$.

A t paraméterhez tartozó pontnak P ponttól való távolsága, illetve ennek négyzete

$d^2 = (4t - 1)^2 + (3t - 7)^2$

$d^2 = 25t^2 - 50t + 50$

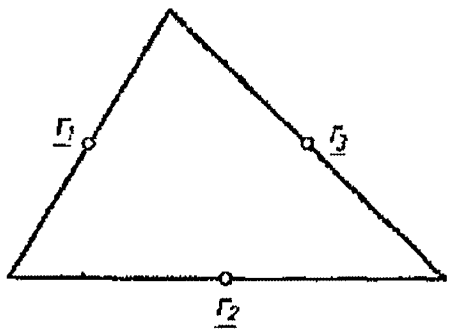
$d^2 = 25(t - 1)^2 + 25$.

A távolság ugyanazon t mellett minimális, mint a négyzete, tehát $t = 1$, így $d^2 = 25$, $d = 5$.

Az egyenesen P-hez legközelebb eső T pont a $t = 1$ értékhez tartozik; így $T(4; 5)$.

***

Az egyetemre készülőknek feltétlen adjunk lehetőséget az egyenes vektoregyenlete alkalmazására. Pl. a kísérleti tankönyv 77. old. 34. feladatban adott egy háromszög három oldalfelező pontja, tehát ezek helyvektora $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Keressük az oldalak egyenletét és a csúcspontok koordinátáit! (10. ábra.)



10. ábra

Az oldalegyenesek vektoregyenletei:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)$

A csúcspontokba mutató helyvektorok, mint ahogyan már előzőleg megismerték a tanulók: (Matematika a középiskolák III. osztálya számára III. kötet. Kísérleti tankönyv 10. old. 3. példa.)

$\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$

$\mathbf{b} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$

$\mathbf{c} = -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$.

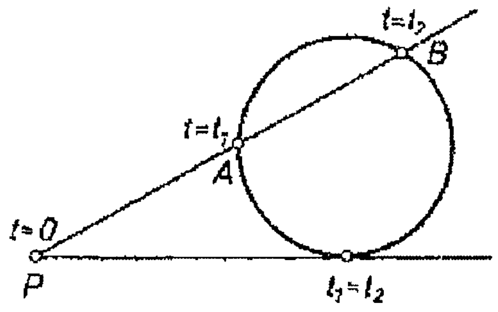
Érdemes az egyetemi tanulás előkészítése szempontjából, két paraméteres egyenletrendszerrel adott egyenes metszéspontját meghatározni, természetesen nem visszatérve az egyenes egyenletére.

***

A kísérleti tankönyv külső pontból a körhöz húzható érintő egyenletének meghatározását csak a szerkesztés menetének követésével végzi. Érdemes a feladat paraméteres megoldásával is foglalkozni, ha másképpen nem, úgy szorgalmi feladatnak adni vagy szakkörön feldolgozni. A kísérleti tankönyv 49. oldalán levő 4. mintafeladat paraméteres egyenletrendszer alkalmazásával is megoldható.

9. feladat

Írjuk; fel az $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$ körhöz az $A(15; -11)$ pontból húzható érintők egyenletét!



11. ábra

Az A ponton átmenő sugársor egy egyenletrendszere

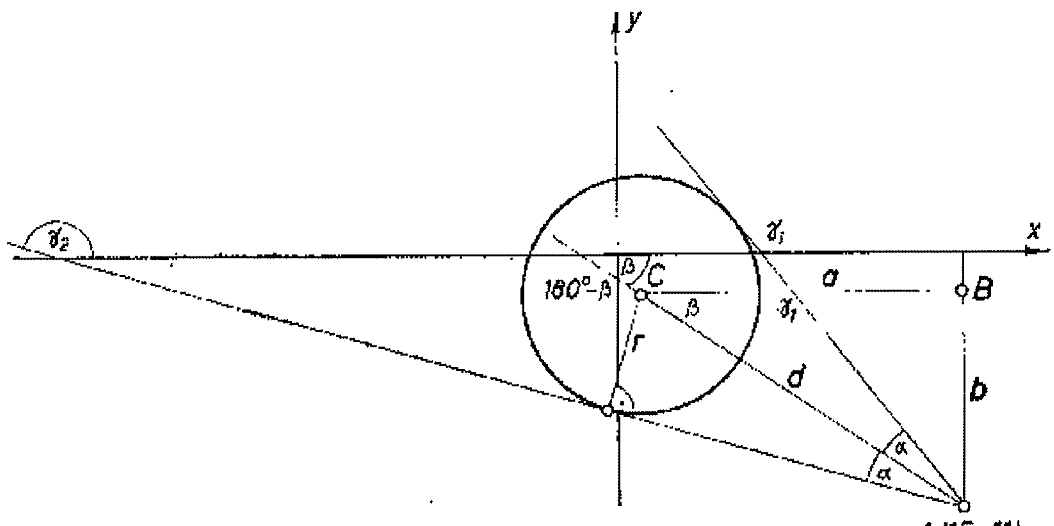
$$x = 15 + tv_1$$
$$y = -11 + tv_2. \qquad (3)$$

A sugársor egyeneseinek a körrel 2, 1 vagy 0 közös pontjuk van. A közös pontokhoz tartozó t paraméterértéket megkapjuk, ha (3)-at a kör egyenletébe behelyettesítjük, és az így t-re kapott másodfokú egyenletet megoldjuk. Érintés abban az esetben áll fenn, ha ezen egyenlet diszkriminánsa 0 (nulla). Tehát

$$(15+tv_1)^2 + (-11+tv_2)^2 - 4(15+tv_1) + 4(-11+tv_2) - 17 = 0$$
$$(v_1^2 + v_2^2)t^2 + 2(13v_1 - 9v_2)t + 225 = 0$$
$$4(13v_1 - 9v_2)^2 - 4 \cdot 225(v_1^2 + v_2^2) = 0$$
$$72v_2^2 + 117v_1v_2 + 28v_1^2 = 0$$
$$\frac{v_2}{v_1} = m, \text{ így } m_1 = -\frac{4}{3} \text{ és } m_2 = -\frac{7}{24}.$$

Az érintők egyenlete $4x + 3y = 27$ és $7x + 24y = -159$. (A megoldás természetesen $y = m(x - 15) - 11$ alakkal is végezhető, és lényegében azonos az előzővel.)

Érdemes talán a feladat trigonometrikus megoldásával is foglalkozni, mert az előzőeknél valamivel kevesebb számítással jár.



12. ábra

Az adott kör egyenlete

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25,$

tehát az $A(15; -11)$ ponton kívül adott még a kör középpontja $C(2: -2)$, sugara $r = 5$. (Általában $P(x_0; y_0)$, $C(u, v)$ és r.) Ezek segítségévei meghatározhatók (lásd 12. ábra) a következők:

12

$d = AC, \quad a = BC = x_0 - u, \quad b = |y_0 - b|$

$$tg\alpha = \frac{r}{\sqrt{d^2 - r^2}}, \quad tg\beta = \frac{b}{a},$$

most $d = \sqrt{250}$, a = 13, b = 9, $tg\alpha = \frac{1}{3}$, $tg\beta = \frac{9}{13}$. A feladatban az érintők iránytangensét $tg\gamma_1$-et és $tg\gamma_2$-t kell meghatározni.

Az ábrából látható, hogy $\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta)$ és $\gamma_2 = 180° - \beta - \alpha$, tehát

$$m_1 = tg\gamma_1 = -tg(\alpha + \beta) = -\frac{\frac{1}{3} + \frac{9}{13}}{1 - \frac{9}{39}} = -\frac{4}{3},$$

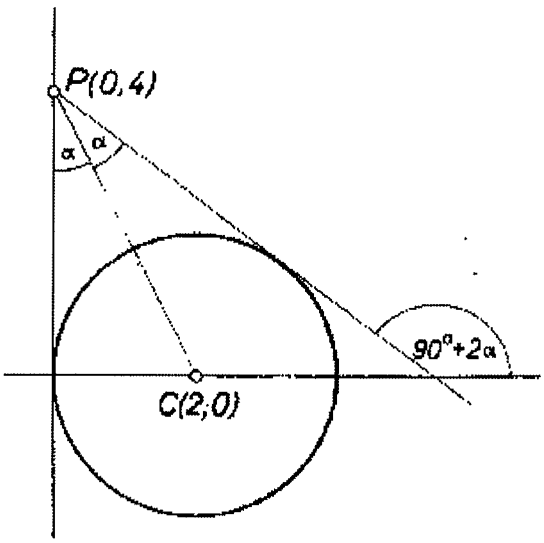
és

$$m_2 = tg\gamma_2 = tg(\alpha - \beta) = -\frac{\frac{1}{3} - \frac{9}{13}}{1 + \frac{9}{39}} = -\frac{7}{24}.$$

Természetesen a módszer minden esetben alkalmazható, viszont egyes speciális elhelyezkedés esetén módosul, egyszerűsödik. Ilyenek a kísérleti tankönyv 83. old. 123. és 124. feladatai.

10. feladat

Írjuk lel a $P(0; 4)$ pontból az $x^2 + y^2 - 4x = 0$ körhöz húzható érintők egyenletét! (13. ábra).



13. ábra

A kör és pont speciális elhelyezkedéséből kivetkezik, hogy az egyik érintő az y tengely.

A kör középpontja $C(2; 0)$, sugara $r = 2$. Az ábra jelölése szerint a másik érintő iránytangense $m = tg(2\alpha + 90°)$, ahol $tg\alpha = \frac{1}{2}$.

$$m = -ctg2\alpha = -\frac{1}{tg2\alpha} = \frac{tg^2\alpha - 1}{2tg\alpha},$$

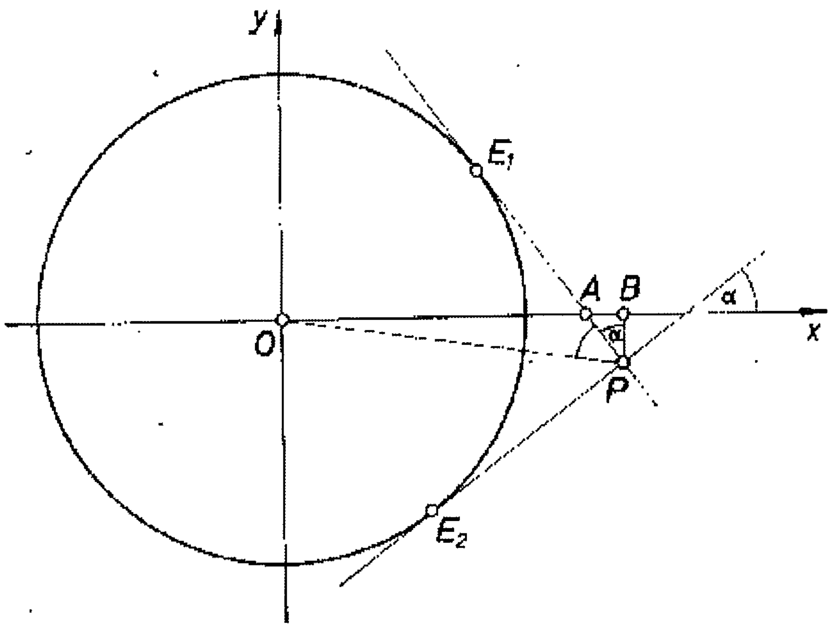
tehát $m = -\frac{3}{4}$.

A másik érintő egyenlete tehát $3x + 4y = 16$.

11. feladat

Írjuk fel a $P(14; -2)$ pontból az $x^2 + y^2 = 100$ körhöz húzható érintők egyenletét! Mekkora szöget zár be a két érintő? Mekkora az érintőszakaszok hossza?

A 14. ábra jelöléseit alkalmazva $OP = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, így az OE_iP ($i = 1, 2$) derékszögű háromszög egyenlő szárú, hiszen a befogó 10 egység. A két érintő tehát egymásra merőleges, és az érintőszakaszok hossza 10 egység, Az OBP derékszögű háromszög P csúcsánál fekvő szöge $\alpha + 45°$, ahol α a PE_2 érintő irányszöge.



14. ábra

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45°) = 7$$

$$\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha} = 7$$

$$tg\alpha = \frac{3}{4}.$$

Így az egyik érintő meredeksége $m_2 = \frac{3}{4}$, tehát a másik érintő meredeksége

$$m_1 = -\frac{4}{3}.$$

***

Mértani helyekre vonatkozó feladatok megoldásával kapcsolatban érdemes áttekinteni Rieger Richárd cikkét a Matematika tanítása 1960. évi 6. számában.

Rábai Imre: A matematikatanítás gyakorlatából

Hogyan írjuk le az azonosságokat?

A tankönyvek és az úgynevezett „Függvénytáblázat” (F) sok azonosságot tartalmaznak. A tanítás folyamán, a feladatok megoldása során problémák merülhetnek fel.

Néhány feladat ennek illusztrálására.

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\mathrm{tg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\mathrm{tg}2x+1$$

„Megoldás” (Az idézőjellel szeretném a problémát érzékeltetni.) Az (F)-ben található

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}(2\alpha)=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

azonosságokat alkalmazhatjuk. Ekkor

$$\frac{\mathrm{tg}x-1}{1-(\mathrm{tg}x)\cdot(-1)}=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}+1\text{, ahonnan}$$

$-(\mathrm{tg}\,x-1)^2=2\mathrm{tg}\,x+1-\mathrm{tg}^2x$, így $-\mathrm{tg}^2x+2\mathrm{tg}\,x-1=-\mathrm{tg}^2x+2\mathrm{tg}\,x+1$,
tehát az egyenletnek „nincs megoldása”.

Valóban nincs?. Az eredeti egyenletnek (a benne szereplő kifejezéseknek) az

$$x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad k\in\mathbf{Z}$$

helyeken van értelme, az azonosságok alkalmazásával a helyettük írt kifejezéseknek nincs. Az

$$x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad k\in\mathbf{Z}$$

megoldása az adott egyenletnek, hiszen kielégíti azt:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{3}{4}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\pi+k\pi\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$$

és

$$\mathrm{tg}2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+1=\mathrm{tg}(\pi+2k\pi)+1=1.$$

Itt a probléma. Adott egy egyenlet (egyenletrendszer, kifejezéssel megadott függvény), amelynek adott az értelmezési tartománya. Ezen a halmazon kell dolgozni. Most

$$x+\frac{3\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+n\pi, \qquad n\in\mathbf{Z}$$

és

$$2x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi, \qquad m\in\mathbf{Z}, \quad \text{azaz} \quad x\neq\frac{\pi}{4}+m\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad m\in\mathbf{Z},$$

tehát

$$x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+m\cdot\frac{\pi}{2},\quad m\in\mathbf{Z}\right\},$$

azaz az $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ helyeken értelmezett az egyenletben szereplő minden kifejezés, és az $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbf{Z})$ számok kis is elégítik az egyenletet.

A tankönyvek például a

$$\mathrm{tg}(2x)=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$$

azonosság tanítása során meghatározzák az azonosság értelmezési tartományát, vagyis azt a legbővebb halmazt, ahol mindkét oldalon álló kifejezésnek értelme van, most a tg $2x$ az $x=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$ számok kivételével minden más valós számra értelmezett, míg a $\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$ kifejezés az $x=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$ számokon kívül az $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $(n\in\mathbf{Z})$ számokra sem értelmezett, azaz a tg $2x$ értelmezési tartománya **bővebb**, mint a $\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$ értelmezési tartománya (a $\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$ értelmezési tartománya **szűkebb**, mint a tg $2x$ értelmezési tartománya.)

Így, ha tg $2x$ helyébe a $\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$ kifejezést írjuk, akkor mondhatnánk, hogy „szűkítő azonosságot" alkalmaztunk, míg ha $\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$ helyébe tg $2x$-et írunk, akkor „bővítő azonosságot" alkalmaztunk. A „szűkítő azonosság" alkalmazása gyökvesztéssel járhat az egyenlet megoldása során, míg a „bővítő azonosság" alkalmazása hamis gyök belépésével járhat.

Kérdésem az, hogy ezt a „bővítő-szűkítő" lehetőséget valahogyan jelöljük-e (F)-ben, illetve a tankönyvekben. Egyes könyveimben én alkalmaztam a következőt (amit más folyóiratban is láttam).

Az egyenlőség jel fölé, illetve alá egy nyilat írhatunk, amely a „bővülés" felé mutat, felhívva erre a figyelmet. (Ha mindkét irányba mutat a nyíl, akkor megegyezik az értelmezési tartomány. Pontosan ez hívhatja fel a figyelmet arra, ha nem változik az értelmezési tartomány.)

Tehát

a) $\mathrm{tg}2x\overset{\leftarrow}{\equiv}\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}$;

b) $\sin 2x\overset{\leftrightarrow}{=}2\sin x\cos x$

(Érdemes azon is elgondolkodni, hogy ilyenkor az egyenlőségjel (=) helyett az azonosság jelét *(≡)* írjuk-e ki?)

2. Tekintsük az $f:(x;y)\mapsto\sqrt{xy}$ és a $g:(x;y)\mapsto\sqrt{x}\sqrt{y}\ldots(x\geq 0, y\geq 0)$ függvényeket. Határozzuk meg f'_x-et és és g'_x-et.

$$f'_x=\frac{y}{2\sqrt{xy}}\quad(xy>0),\qquad g'_x=\sqrt{y}\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad(x>0, y\geq 0).$$

Egyetemi hallgatók közül egyesek $\sqrt{xy}$ helyett a vele „azonosan egyenlő" $\sqrt{x}\sqrt{y}$-t írják. Helytelenül, hiszen „szűkítő" azonosságot alkalmaznak.

$$\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}\overset{?}{\equiv}\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Az elmondottak alapján a következőket írhatjuk:

$$\sqrt{ab} \overset{\leftarrow}{\equiv} \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{ab} \overset{\rightarrow}{\equiv} \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}, \quad \sqrt{ab} \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}.$$

A négyzetgyökökre vonatkozó azonosságok mindegyike ilyen értelemben problematikus, és ehhez hasonlóan a logaritmus azonosságai is. Például:

$$\log_a xy \overset{\leftarrow}{\equiv} \log_a x + \log_a y \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\log_a xy \overset{\rightarrow}{\equiv} \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$\log_a|xy| \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$\log_a x^2 \overset{\leftarrow}{\equiv} 2\log_a x, \qquad \frac{1}{2}\log_a x^2 \overset{\leftarrow}{\equiv} \log_a x$$

$$\log_a x^2 \overset{\leftrightarrow}{\equiv} 2\log_a|x|, \qquad \frac{1}{2}\log_a x^2 \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \log_a|x|$$

A kérdés tehát az is, hogy szerepeljenek-e a kifejezések értelmezési tartományai?

3. a) A tankönyvekben a

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \text{illetve a} \quad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

azonosságok találhatók, míg (F)-ben

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

A $\pm$ jel zavaró lehet, én az előző írásmódot tartom célszerűbbnek.

b) Számomra érthetetlen, hogy a következő fontos (szűkítő-bővítő) azonosságok hiányoznak (F)-ből és egyes tankönyvekből:

$$\sin\alpha \overset{\leftarrow}{\equiv} \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha \overset{\leftarrow}{\equiv} \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left(\sin 2\alpha \overset{\leftarrow}{\equiv} \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right) \qquad \left(\cos 2\alpha \overset{\leftarrow}{\equiv} \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)$$

4. Ha $A \equiv B$ és $B \equiv C$, akkor $A \equiv C$. Ezt az állítást $A \equiv B \equiv C$ alakban is „szokták" írni. Így érdemes lenne például a következőt írni:

$$\cos 2\alpha \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \overset{\leftrightarrow}{\equiv} 2\cos^2\alpha - 1 \overset{\leftrightarrow}{\equiv} 1 - 2\sin^2\alpha \overset{\leftarrow}{\equiv} \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Az öt kifejezés közül az első négynek megegyezik az értelmezési tartománya, az ötödiknek szűkebb. Ezt például így is érzékeltethetnénk:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \left(= \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right).$$

(F)-ben a következő található:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Az előzőekből kiderült, hogy vigyázni kell a „szűkítő-bővítő" azonosságok alkalmazása során. Most az első, a második és a negyedik kifejezésnek megegyezik az értelmezési tartománya ($\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{(2k+1)\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$), a **harmadiké** szűkebb ($\alpha \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$).

Már a sorrend megváltoztatása is jelenthet valamit.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \left(=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

Hasonlóan

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \quad \left(=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

A javasolt jelöléssel:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \overset{\leftrightarrow}{\equiv} \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \overset{\rightarrow}{\equiv} \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

5. Megjelent példatáraimban közöltem néhány „szokatlan” azonosságot. Ajánlom ezeket a tanítás folyamán feladni:

a) $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$, $\left(\sqrt{-a}\sqrt{-b} \overset{\rightarrow}{\equiv} \sqrt{ab}\right)$;

b₁) $\sqrt{ab}\sqrt{bc} = b\sqrt{ac}$;

b₂) $\sqrt{ab}\sqrt{bc} = -b\sqrt{ac}$;

c₁) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bc}} = \sqrt{\dfrac{a}{c}}$;

c₂) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-bc}} = \sqrt{-\dfrac{a}{c}}$;

d₁) $\sqrt{(abc)^2} = \left(\sqrt{abc}\right)^2$;

d₂) $\sqrt{(abc)^2} = \sqrt{-abc}$.

Célszerű meghatározni a bővülés (szűkülés) irányát.

6. Ajánlom megoldásra a következő, volt felvételi feladatot:
$\operatorname{tg}2x + 3\operatorname{ctg}x = 0$.

7. Hol a hiba? A következő feladatokat „megoldásaikkal” együtt valahol olvastam.

7.1. $\left(1-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\right) = \sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi-x}{2}$

„Megoldás”

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\cos x \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$

$$2(1+\cos x) = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x} \quad (!) \qquad \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \overset{\leftarrow}{\equiv} \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

$$2(1+\cos x) = \sqrt{3}\,\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad (!!)$$

$$(1+\cos x)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{\sin x}\right) = 0 \quad (!)$$

$\cos x = -1$ vagy $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (!!)

$x_1 = \pi + 2k\pi$ (!!) $\quad x_2 = \frac{\pi}{3}\pi + 2n\pi, \quad x_3 = \frac{2\pi}{3}\pi + 2m\pi, \quad k, m, n \in \mathbf{Z}$

(Mi lenne, ha a $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} \equiv \frac{\sin x}{1-\cos x}$ azonosságot alkalmaznánk?)

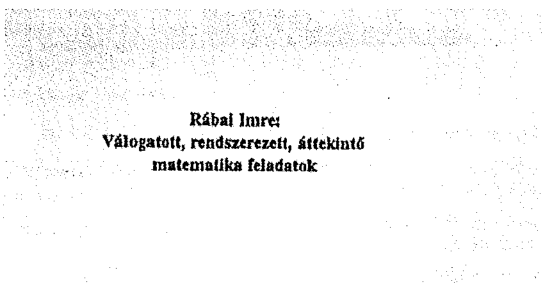
7.2. $\sin 4x = 2\sin x\cos 3x$
$\sin x\cos 3x + \cos x\sin 3x = 2\sin x\cos 3x$
$\cos x\sin 3x = \sin x\cos 3x$
„Osszuk el” az egyenlet mindkét oldalát $(\cos x)(\cos 3x)$-szel (!!)
$\mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}x$ (!!)

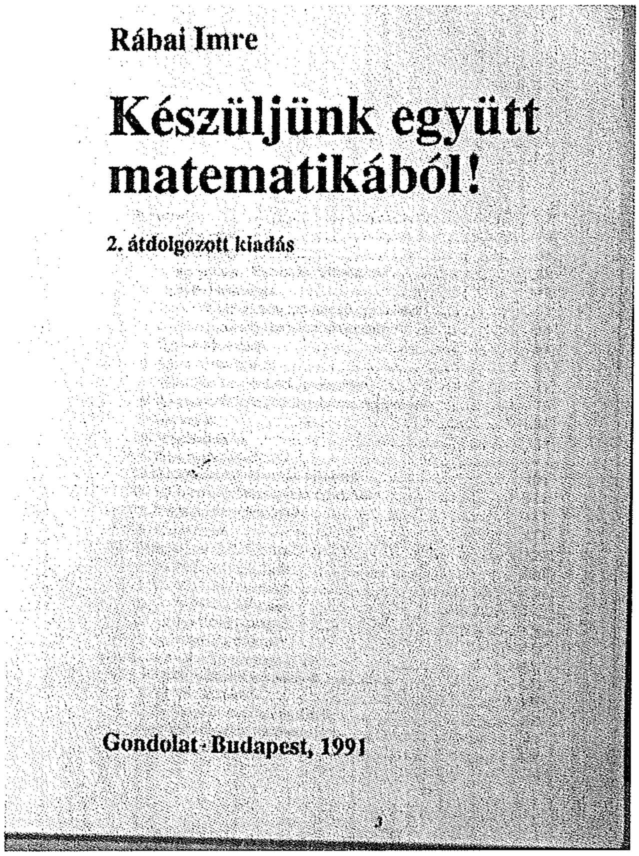
$3x = x + k\pi \qquad x = k\cdot\frac{\pi}{2} \qquad k \in \mathbf{Z}$ (!!!)

(Mi lenne, ha a $\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x = \sin 2x$ azonosságot alkalmaznánk?)

Várom a középiskolákban tanító kollégák véleményét.

Meg nem jelent könyvek


Rábai Imre:
Válogatott, rendszerezett, áttekintő matematika feladatok


Rábai Imre

Készüljünk együtt matematikából!

2. átdolgozott kiadás

Gondolat · Budapest, 1991

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA PÉLDATÁR
III. kötet
LINEÁRIS ALGEBRA

Összeállította:
Rábai Imre

Műegyetemi Kiadó, 2009

Szerkesztette:

Monostory Iván
egyetemi adjunktus

Összeállította:

Rábai Imre
egyetemi adjunktus

(Tizenharmadik utánnyomás)

egyetemi jegyzet·
oktatási célra

Azonosító: **040933**

VESZÉLY
A fénymásolás megöli a könyvet!

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 14,7 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám:6956/09

Tartalomjegyzék

22

EGYENLETRENDSZEREK

Mit érdemes ismerni, és mit érdemes tanítani a középiskolákban?

VARGA TAMÁS
emlékére,
akitől
beszélgetéseink
során sokat
tanultam.

I. Három feladat története.

1. Egy derékszögű háromszög átfogója 10, a derékszög szögfelezőjének hossza $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ egység. Mekkorák a befogók? (Felvételi feladat)

2. Egy „rossz" feladat:

Oldja meg a következő egyenletrendszert! $\left.\begin{aligned} xy &= 1, \\ x + y - \cos^2 z &= -2. \end{aligned}\right\}$ (Felvételi feladat)

3. Tekintsük az $(x,y) \mapsto f(x,y)$ kétváltozós függvényt, ahol

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}, \quad x \neq 0,\ y \neq 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mely (x,y) helyeken lehet a függvénynek helyi szélső értéke? (Egyetemi gyakorló feladat)

$\left(2x + y = \frac{8}{x^2},\ x + 2y = \frac{8}{y^2}.\right)$

II. 1. Kétismeretlenes (háromismeretlenes) egyenletek megoldása.

2. a) Egyenletrendszer alaphalmaza (kiindulási halmaza, értelmezési tartománya).

b) Mit jelent egyenletrendszert megoldani?

Mikor mondjuk, hogy egy (x_0,y_0) számpár $\left((x_0,y_0,z_0)\right.$ számhármas$\left.\right)$ megoldás?

3. Lineáris egyenletrendszerek.

4. Algebrai egyenletrendszerek.

5. Tanácsok és módszerek.

a) Helyettesítő módszer;

b) egyenlő együtthatók módszere;

c) új **változók** bevezetése;

d) új **változó** bevezetése;

e) valamelyik (vagy több) egyenlet nullára redukálása és a nem nulla kifejezés szorzattá alakítása;

f) egyenletek összeadása, kivonása, szorzása, osztása.

6. Egyenletrendszerek ekvivalenciája.

Ekvivalencia tétel:

Az $\begin{aligned} f(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$ (1) egyenletrendszer pontosan akkor ekvivalens az

$$\begin{aligned} a_{1,1}f(x,y) + a_{1,2}g(x,y) &= 0, \\ a_{2,1}f(x,y) + a_{2,2}g(x,y) &= 0, \quad a_{i,k} \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad (2)$$

egyenletrendszerrel, ha

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Megjegyzések: a) A tétel három- és többismeretlenes egyenletrendszerekre is felírható.

b) Probléma: Legyenek $a_{i,k} = a_{i,k}(x,y)$. Igaz-e a tétel azokra az (x_0,y_0) számpárokra, amelyekre

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x_0,y_0) & a_{1,2}(x_0,y_0) \\ a_{2,1}(x_0,y_0) & a_{2,2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} \neq 0?$$

7. Tanácsok az exponenciális, a logaritmikus és a trigonometrikus egyenletrendszerek megoldásához.

8. Egyenletrendszerek közelítő megoldása. Többváltozós függvények Taylor sora.

Rábai Imre

KIEGÉSZÍTÉS

1. Az $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ egyenlet megoldásai.

2. Az $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ egyenlet megoldásai.

3. Az $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ homogén (kétismeretlenes másodfokú) egyenlet megoldási módszerei.

4. Az

$$A^2 + B^2 = 0 \text{ pontosan akkor, ha } A = 0 \text{ és } B = 0$$

tétel alkalmazása.

5. Tekintsük az $f(x,y) = g(x,y)$ egyenletet, ahol $f(x,y) \geq M$ és $g(x,y) \leq M$. Milyen megoldása lehet az adott egyenletnek? (Például $x^2 + 1 = \cos y$.)

6. Szimmetrikus egyenletrendszerek.
Néhány ekvivalens, illetve következmény egyenletrendszer.

1. $\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0, \\ f_2(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} (1);$ $\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0, \\ f_1(x,y) + f_2(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} (2);$ $\left.\begin{aligned} f_2(x,y) &= 0, \\ f_1(x,y) - f_2(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} (3);$

$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) + f_2(x,y) &= 0, \\ f_1(x,y) - f_2(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} (4);$ $\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0, \\ \alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) &= 0, \end{aligned}\right\} \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ (5);$

Igazolja, hogy $(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3) \Longleftrightarrow (4) \Longleftrightarrow (5)$.

2. Legyen adott az

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= a, \\ f_2(x,y) &= b, \end{aligned}\right\} ab \neq 0 \ (1)$$

egyenletrendszer, és tekintsük a (2), (3), (4) egyenletrendszereket. Melyik ekvivalens (1)-gyel, és melyik következménye (1)-nek?

1. $\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= a, \\ f_1(x,y) \cdot f_2(x,y) &= ab \end{aligned}\right\} (2);$ $\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= a, \\ \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} (3);$ $\left.\begin{aligned} f_1(x,y) \cdot f_2(x,y) &= ab, \\ \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} (4).$

1. a) $\left.\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &= 9, \\ 4x^2 + xy + 4y^2 &= 18; \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x^2 + 3xy &= -2, \\ 2xy - y^2 &= -5; \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \frac{x^2 + 4y^2}{xy} &= 5, \\ 2x^2 - y^2 &= 31; \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x^2 - xy - 2y^2 &= 0, \\ 2x^2 + y^2 + \sqrt{2x^2 + y^2} &= 12. \end{aligned}\right\}$

2. a) $\left.\begin{aligned} x + y + \sqrt{x + y} &= 20, \\ x^2 + y^2 &= 136; \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y - \sqrt{x + y} &= 2, \\ x^3 + y^3 &= 40; \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{6x}{x + y}} + \sqrt{\frac{x + y}{6x}} &= \frac{5}{2}, \\ y - x &= 44; \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x + y - \sqrt{x + y - 2} &= 14, \\ \frac{x^2 + y^2}{27} + xy &= 30, \end{aligned} \quad x > 0,\ y > 0.\right\}$

3. a) $\left.\begin{aligned} (x + 1)(y - 2) &= 0, \\ x^2 + 2xy &= 5; \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2(x + y), \\ x^2 + y^2 &= 5(x - y); \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 + x - y &= 10, \\ x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 &= 16; \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x^3 - x^2y - 4xy^2 + 4y^3 &= 0, \\ 2x^2 + y^2 &= 12. \end{aligned}\right\}$

4. a) $\left.\begin{aligned} x^2 &= y + 2, \\ y^2 &= x + 2; \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} xy &= 15, \\ x + y - \sqrt{\frac{x + y}{x - y}} &= \frac{12}{x - y}. \end{aligned}\right\}$

Megoldás-e? $x = -\sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{109} + 3\right)}$

$y = -\sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{109} - 3\right)}$

$x = 5,\ y = 3.$

5. a) $\left.\begin{aligned} xy + x + y &= 29, \\ xy - 2x - 2y &= 2; \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + xy &= 19, \\ x + y &= \frac{84}{xy}; \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} xy + x + y &= 34, \\ x^2 + y^2 - x - y &= 42; \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 24(x + y) &= 7xy, \\ x^2 + y^2 &= 100, \end{aligned} \quad x > 0,\ y > 0;\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} \frac{1}{xy} + \frac{1}{x + y} &= \frac{1}{2}, \\ x^2y + xy^2 &= -2. \end{aligned}\right\}$

Kétismeretlenes (háromismeretlenes) egyenletek

1. $(x+4)^2 + (2x - y + 5)^2 = 0.$

2. $(4x^2 - y^2)^2 + (x+1)^2 = 0.$

3. $(x-2)^2 + (2x - y)^2 + (y - 4z)^2 = 0.$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 3.$

5. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z.$

6. a) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{1+y^2}$; b) $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{1+y^2}$.

7. a) $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos y$; b) $x + \dfrac{1}{x} = -2\sin y$.

8. a) $x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0$; b) $x^2 - 6x\cos xy + 9 = 0.$

9. a) $2\cos^2\dfrac{x^2+3y}{6} = 3^x + 3^{-x}$; b) $2\sin^2\dfrac{x^2+2y}{4} = 2^x + 2^{-x}$.

10. $4\sin^2 x - 4\cos x \cdot \sin y - 5 = 0.$

11. $\sin^2(x+y) - \cos^2(x-y) = 1.$

12. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = 2y^2 - 4y + 3.$

13. a) $\log_2\left(\sin^2(xy) + \dfrac{1}{\sin^2(xy)}\right) = \dfrac{1}{y^2 - 2y + 2}$;

b) $\log_2\left(\cos^2(xy) + \dfrac{1}{\cos^2(xy)}\right) = \dfrac{1}{y^2 - 4y + 6}$.

14. $\sin x + \cos y = 2.$

15. $\sin x \cdot \cos y = 1.$

Két egyenlet, három ismeretlen

1. $\left.\begin{aligned} x + y &= 8, \\ xy - z^2 &= 16 \end{aligned}\right\}$

2. a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 2xy - z^2 &= 4; \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 4, \\ 2xy - z^2 &= 16. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} xy &= 1, \\ x + y &= \cos^2 z - 2. \end{aligned}\right\}$

Három ismeretlen, három egyenlet

1. $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1, \\ xy + xz + yz &= 27. \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} \frac{xy}{x+y} &= 1 - z, \\ \frac{yz}{y+z} &= 2 - x, \\ \frac{zx}{z+x} &= 2 - y. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x^2 &= \phantom{x+{}} y + z + 2, \\ y^2 &= x \phantom{{}+y} + z + 2, \\ z^2 &= x + y \phantom{{}+z} + 2. \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} x^2 + 2y + 1 &= 0, \\ y^2 + 2z + 1 &= 0, \\ z^2 + 2x + 1 &= 0. \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} \frac{2x^2}{1+x^2} &= y, \\ \frac{2y^2}{1+y^2} &= z, \\ \frac{2z^2}{1+z^2} &= x. \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} \frac{xyz}{x+y} &= 2, \\ \frac{xyz}{y+z} &= 1{,}2, \\ \frac{xyz}{x+z} &= 1{,}5. \end{aligned}\right\}$

RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉS, PÉCS 2012

RÁBAI IMRE

A Janus Pannonius Gimnázium
tiszteletére
(1956–57; 2012)
[55 év!]

Triviális (kétváltozós) azonos egyenlőtlenségek és alkalmazásuk
(Egyes speciális kétváltozós függvények szélsőértéke, feltételes szélsőértéke)

I. 1) Számítsuk ki, milyen értékpár esetén lesz az $A = x^4 + y^4 + \dfrac{2}{x^2y^2}$ kifejezés értéke a legkisebb! (Érettségi-felvételi 1973.)

2) Mely $(x; y)$ számpár esetén veszi fel az $f(x; y) = x^4 + y^4 + \dfrac{2}{x^2y^2}$ függvény a legkisebb értékét, és mennyi ez a legkisebb érték?

(A legkisebb érték 4, amelyet az $(x; y) = (1;1), (1;-1), (-1;1), (-1;-1)$ esetén vesz fel.)

II. 1) Legyen $x > 0$, $y > 0$ és $x + y = 1$. Igazolja, hogy $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{y}\right) \geq 9$ (Felvételi feladat 1987.)

2) Legyen $x > 0$, $y > 0$ és $x + y = 1$. Hol veszi fel az $f(x; y) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ függvény a legkisebb értékét, és mennyi ez a legkisebb érték?

(A legkisebb érték 9, amit az $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$ esetén vesz fel.)

III. 1) Legyenek a és b olyan valós számok, hogy $a > b$ és $ab = 1$. Bizonyítsa be, hogy $\dfrac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$ (Felvételi feladat 1987.)

2) Legyenek x és y olyan valós számok, hogy $x > y$ és $xy = 1$. Mely $(x; y)$ számpár esetén lesz az $f(x; y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ kétváltozós függvény a legkisebb, és mennyi ez a legkisebb érték?

(A legkisebb érték $2\sqrt{2}$, amit az $x_1 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ és az $x_2 = \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ számpárok esetén vesz fel.)

IV. 1) Bizonyítsa be, hogy ha valamely $(x;y)$ valós számpárra $x^2+y^2=1$, akkor $|x+y|\le\sqrt{2}$! Mely számpárokra áll fenn az egyenlőség? (Érettségi-felvételi feladat 1989.)

2) Mely $(x;y)$ számpárok esetén legnagyobb az $f(x;y)=|x+y|$ függvény értéke, és mennyi ez a legnagyobb érték, ha $x^2+y^2=1$?

([A feladat $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t<2\pi$ helyettesítéssel is megoldható.]
[$\sqrt{a^2}$) helyett $|a|$ írható, amit gyakran alkalmazunk, $|a|$ helyett $\sqrt{a^2}$ írható, amit nyilván ritkábban.]
Most $2xy\le x^2+y^2$ és $|x+y|=\sqrt{(x+y)^2}$,
$|x+y|=\sqrt{x^2+y^2+2xy}\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2}$.
A függvény legnagyobb értéke $\sqrt{2}$, amit az $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén vesz fel, hiszen $x=y$ és $x^2+y^2=1$.)

V. 1) Igazolja, hogy ha az a és b valós számok összege 1, akkor $a^4+b^4\ge\frac{1}{8}$ (Érettségi-felvételi feladat 1988.)

2) Határozza meg az $f(a;b)=a^4+b^4$ függvény minimumát, ha $a+b=1$. Mely helyen veszi fel a minimumát a függvény?

([A feladat $a=\frac{1}{2}+n$, $b=\frac{1}{2}-n$ helyettesítéssel megoldható.]
[A minimum értéke $\frac{1}{8}$, amit $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ esetén vesz fel.])

(triviális	a feltételből adódó	következmény
$(a-b)^2\ge 0$, $a^2+b^2\ge 2ab$	$(a+b)^2=1$	
$(a^2-b^2)^2\ge 0$, $a^4+b^4\ge 2a^2b^2$ (**)	$a^2+b^2=1-2ab$ (*)	$a^2+b^2\ge 2ab$-hez (*)-ot hozzáadva:
$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$,		$a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$
		$(a^2+b^2)^2\ge\frac{1}{4}$

Tehát $a^4+b^4\ge\frac{1}{4}-2a^2b^2$, ehhez hozzáadva (**)-ot: $2(a^4+b^4)\ge\frac{1}{4}$, $a^4+b^4\ge\frac{1}{8}$)

RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉS, PÉCS 2012

RÁBAI IMRE

A 90 éves
Czapári Endre
tanár úr tiszteletére

Néhány tanpélda

I. 1) „Preparáltak" ezek a feladatok?

$\sin^6 x + \cos^6 x = a$, ahol $a = \frac{1}{4}; \frac{5}{8}; 1; \frac{13}{16}; \frac{7}{16}; \dots$

{Miért preparáltak? $(-1; 0; 1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \dots)$

Egy rókáról sok-sok bőrt...

$\sin^4 x + \cos^4 x = b$, ahol $b = \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{7}{8}; \frac{5}{8}; \dots)$

2) Egy feladat sok arca!

a) Oldja meg a következő egyenletet!

$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

(Érettségi-felvételi feladat 1985.)

b) Vázolja az $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonját, ahol

$f(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$, $x \in \mathbf{D}$ $(\mathbf{D} = ?)$

(Ismert feladat.)

3) Vázolja az $x \mapsto g_i(x)$, $(x \in \mathbf{D}_i)$ függvények grafikonját!

a$_1$) $g_1(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$; a$_2$) $g_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$; a$_3$) $g_3(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$;

b) $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$; ...

4) Tekintsük az $E(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + p(\sin^4 x + \cos^4 x)$ kifejezést.

a) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy a kifejezés értéke független legyen x-től!

b) Mely p értékekre van az $E(x) = 0$ egyenletnek valós megoldása? (Matematikai Lapok, Kolozsvár, 1983.)

5) Legyen $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2$. Bizonyítsuk be, hogy $f(\sin\alpha) + f(\cos\alpha) \equiv 0$.

(Számadó László tanár úr feladata.)

[Érdemes megismerni Rábai Imre *Matematika mérőlapok* című könyvében (Műszaki könyvkiadó, 1998, 2002) a *Felvételi feladatok tanulságai. Kezdjük egyszerűvel!* című tanulmányt (144–148. oldal).]

6) Számítsa ki a következő határértéket!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = ?$$

7. a) Hány, a középiskolában tanított (lineáris) transzformációval kapható az $x \mapsto \cos x$ függvény grafikonjából az $x \mapsto \sin^4 x + \cos^4 x$ függvény grafikonja?

b) Megkapható-e egyetlen, a középiskolában tanított (lineáris) transzformációval az $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - \frac{3}{4}$ függvény grafikonja a $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ függvény grafikonjából?

$(f_1(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$, $f_2(x) =)$

[8. $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = ?$ $\int (\sin^6 x + \cos^6 x) dx = ?$]

II. Miért konstruáltam ezeket a „rokon" feladatokat?

1. Mely valós számpárokra igaz a következő egyenletrendszer? (Miért így kérdezem?)

a) $$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{5x}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{5x}} &= 3 \\ (y+6x)(x-y+20) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} &= \frac{8}{3} \\ \log_2(x+y) - \log_2(x-y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a1) $$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} &= 52 \\ y - x &= 44 \end{aligned}\right\}$$

(Érettségi-felvételi feladat 1988.)

b1) $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{5}{2} \\ \log_3(x-y) + \log_2(x+y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(Érettségi-felvételi feladat 1991.)

Rábai Imre,
aki barátsággal köszönti
Czapári Endre tanár urat,
és jó egészséget kíván.

MATEMATIKA

A MATEMATIKAI OSZTÁLYOK SZÁMÁRA

II. KÖTET

HATODIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1979

31

KÉSZÜLT
AZ OKTATÁSI MINISZTER RENDELETÉRE,
AZ ORSZÁGOS PEDAGÓGIAI INTÉZET
IRÁNYITÁSÁVAL

HERCZEG JÁNOS
SURÁNYI JÁNOS
(I. rész)

KŐVÁRI KÁROLY
(II. és III. rész)

RÁBAI IMRE
(IV. rész)

OLÁH GYULÁNÉ
(V. rész)
munkája

Lektorálták:

JELITAI ÁRPÁD
RÁCZ JÁNOS
RUZSA IMRE

ISBN 963 17 4248 2

IV. rész

32

Amit a háromszög trigonometriájáról tudni érdemes*

I. Amit tanítunk

1. Színusztétel és következménye**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = 2r;$$

2. Koszínusztétel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

3. Terület

$$T = \frac{ab\sin\gamma}{2}; \qquad T = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

II. Amit taníthatnánk

1. Vetületi tétel (Carnot (1753–1823) (francia))

$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$

$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma,$

$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$

2. Tangenstétel (Thomas Fink (1561–1656) (dán))

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad \left(\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}\right).$$

3. Molweide formulák (Karl Molweide (1774–1825) (német))

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{vagy} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}};$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{vagy} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

4. Tycho de Brahe formulák

a) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta}$.

($\alpha \neq 90°$).

(Következmény feladat: **III.10.**)

---

* Az összeállítást a teljesség igénye nélkül végeztem.

** A szokott jelölés szerint a háromszög oldalai a b, c, az oldalakkal szemközti szögek rendre α, β, γ, a háromszög kerülete $2s = a + b + c$, a háromszög területe T, a háromszög köré, illetve beírt körének sugara r, illetve ϱ.

III. Minden háromszögben igaz (az egyenletekben oldalak és szögek szerepelnek)

1. a) $b^2 - a^2 = bc\cos\alpha - ac\cos\beta.$

b) $bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$

2. $a \cdot \sin(\beta - \gamma) + b \cdot \sin(\gamma - \alpha) + c \cdot \sin(\alpha - \beta) = 0.$

3. a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}, \qquad \alpha \neq 90°, \quad \beta \neq 90°.$

b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a(a - b\cos\gamma)}{b(b - a\cos\gamma)}.$

4. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2} \qquad \left(\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\gamma}\right).$

(Az 1997. évi felvételi feladatok között szerepelt. Két Molweide formula szorzatából adódik.)

5. $\frac{a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}.$

6. $\frac{a^2\sin(\beta - \gamma)}{\sin\alpha} + \frac{b^2\sin(\gamma - \alpha)}{\sin\beta} + \frac{c^2\sin(\alpha - \beta)}{\sin\gamma} = 0.$

7. $\frac{a(a + c - b)}{b(b + c - a)} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos\beta}.$

8. $bc\sin^2\alpha = a^2(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma).$

9. $\frac{\cos 2\alpha}{a^2} - \frac{\cos 2\beta}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$

10. $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{c - b\cos\alpha}{b - c\cos\alpha}.$

IV. Minden háromszögben igaz (az egyenletekben csak szögek szerepelnek)

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$

2. a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma + \alpha}{2}.$

3. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$

4. $\sin\gamma = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta.$

5. a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$

b) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma.$

6. a) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1.$

b) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 2.$

e) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$.

7. a) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$.

b) $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

c) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$.

8. $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

9. a) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = -4\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\beta}{2}\cdot\cos\frac{3\gamma}{2}$.

b) $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\sin 2\gamma$.

10. a) $\sin((2n+1)\alpha) + \sin((2n+1)\beta) + \sin((2n+1)\gamma) =$

$(-1)^n\cdot 4\cdot\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(2n+1)\beta}{2}\cdot\cos\frac{(2n+1)\gamma}{2}$, $n\in\mathbf{N}$.

($n = 0$ esetén **IV. 1.**)

b) $\sin(2n\alpha) + \sin(2n\beta) + \sin(2n\gamma) = (-1)^{n+1}\cdot\sin(2n\alpha)\cdot\sin(2n\beta)\cdot\sin(2n\gamma)$, $n\in\mathbf{N}$.

($n = 1$ esetén **IV. 5. a)**)

V. Minden háromszögben igaz (az egyenletekben *s*, *r* és *R* szerepel)

1. $(a+b)\cos\gamma + (b+c)\cos\alpha + (a+c)\cos\beta = 2s$.

2. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s}$.

3. $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}$.

4. $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{4r}$.

5. a) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$. **b)** $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. **c)** $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

6. $s\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = a\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

7. $\frac{1}{a}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{abc}$.

8. a) $r = (s-a)\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **b)** $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

9. $s = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

10. a) $\frac{(s-a)}{(s-b)} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **b)** $\frac{s-c}{s} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$.

VI. Minden háromszögben igaz (területképletek)

1. a) $t = r \cdot s$. **b)** $t = r_a \cdot (s - a)$.

2. a) $t = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$. **b)** $t = aR \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

3. $t = \dfrac{abc}{4R}$

4. a) $t = s^2 \cdot \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}$. **b)** $t = s(s-a)\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **c)** $t = (s-b)(s-c)\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5. $t = \dfrac{1}{4} \cdot \left(a^2 \sin 2\beta + b^2 \sin 2\alpha\right)$.

6. $t = \dfrac{1}{4} \cdot \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\mathrm{tg}\alpha$.

VII. Minden derékszögű háromszögben igaz (az átfogó c, $\gamma = 90°$)

1. $\sin 2\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = \dfrac{2b^2}{c^2}$.

2. $\sin 2\alpha = \dfrac{2ab}{c^2}$.

3. $\cos 2\alpha = \dfrac{b^2 - a^2}{c^2}$.

4. a) $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{a}{c-b}$. **b)** $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{c+b}{a}$.

5. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$.

6. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$.

7. $\dfrac{b-a}{b+a} = \mathrm{tg}\dfrac{\beta - \alpha}{2}$.

8. $\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{c-a}{c+a}} = \dfrac{c-a}{b} = \dfrac{b}{c+a}$.

VIII. Ha ezt tudjuk, akkor a háromszög derékszögű!

1. $\sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta$.

2. $ab \cdot \cos\gamma + bc \cdot \cos\alpha + ac \cdot \cos\beta = a^2$.

3. $\dfrac{\sin\beta}{\cos\gamma} + \dfrac{\sin\gamma}{\cos\beta} = 2\sin\alpha$.

4. $\sin\gamma = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

5. a) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **b)** $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

IX. Ha ez teljesül, akkor a háromszög egyenlő szárú!

1. $\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\gamma$.

2. $a\,\mathrm{tg}\,\alpha + b\,\mathrm{tg}\,\beta = (a+b)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

4. a) $\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} = \mathrm{ctg}\,\dfrac{\gamma}{2}$. b) $\sin\alpha\sin\beta = 2\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$.

X. Ha ez teljesül, akkor a háromszög egyenlő oldalú!

1. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{3}{2}$.

2. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2\beta} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2\gamma}$.

XI. Ha ez teljesül, akkor a háromszög derékszögű vagy egyenlő szárú!

1. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$.

2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

3. $\mathrm{tg}\,\alpha\sin^2\beta = \mathrm{tg}\,\beta\sin^2\alpha$, $(\alpha \neq 90°, \beta \neq 90°)$.

4. $\dfrac{\cos\alpha + \cos\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

5. $(b^2+c^2)\sin(\gamma-\beta) = (c^2-b^2)\sin(\gamma+\beta)$.

6. $\dfrac{\cos\gamma + 2\cos\alpha}{\cos\gamma + 2\cos\beta} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

XII. Néhány egyenlőtlenség; minden háromszögben igaz

1. $\sin^2\gamma \geq \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$.

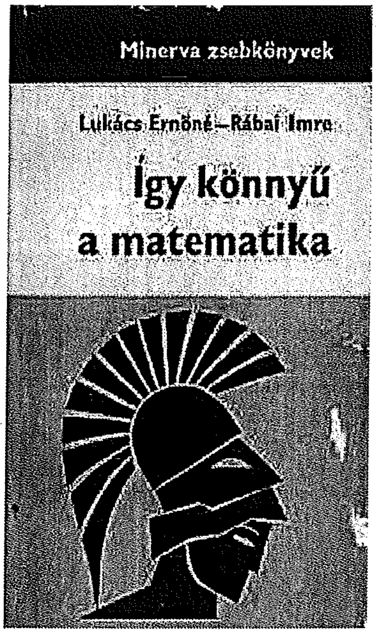
2. a) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{1}{8}$. b) $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

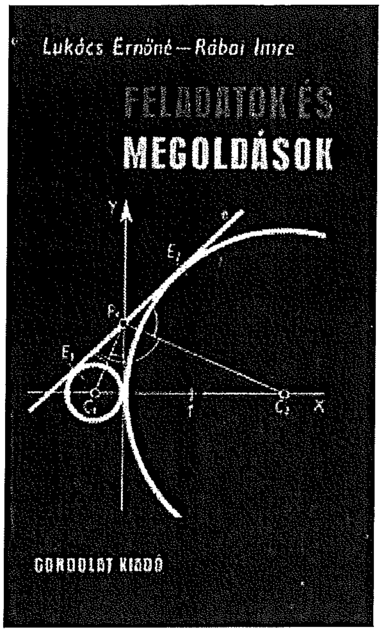
3. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \dfrac{3}{2}$.

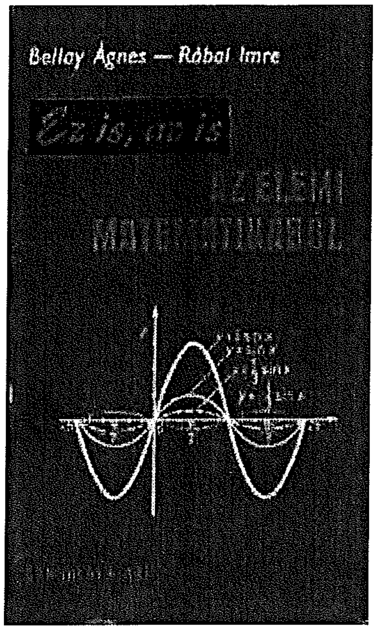
4. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\gamma}{2} \geq \dfrac{3}{4}$.

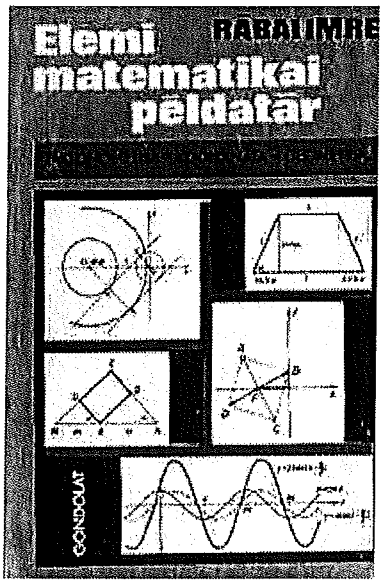
5. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

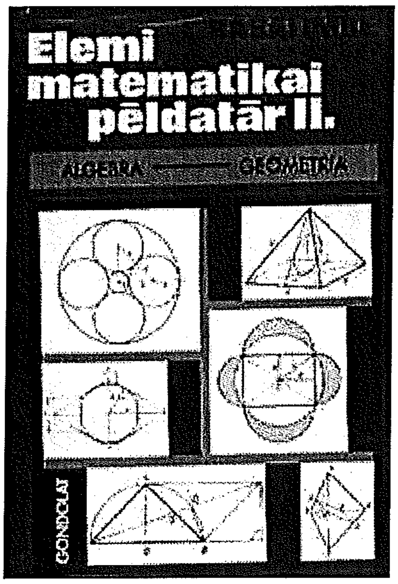
Rábai Imre


Minerva zsebkönyvek
Lukács Ernőné–Rábai Imre
Így könnyű a matematika

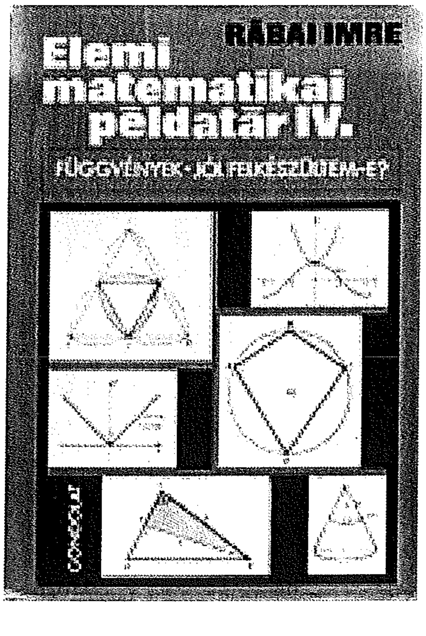

Lukács Ernőné—Rábai Imre
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK
GONDOLAT KIADÓ

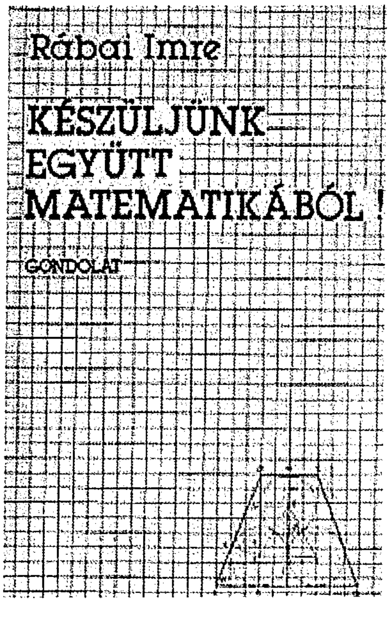

Bellay Ágnes — Rábai Imre
Ez is, az is
AZ ELEMI MATEMATIKÁBÓL

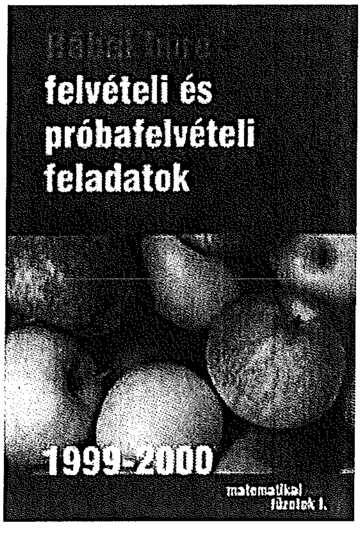

RÁBAI IMRE
Elemi matematikai példatár
GONDOLAT


Elemi matematikai példatár II.
ALGEBRA — GEOMETRIA
GONDOLAT


RÁBAI IMRE
Elemi matematikai példatár III.
SOROZATOK·SOROK·VÁLOGATOTT FELADATOK
GONDOLAT


RÁBAI IMRE
Elemi matematikai példatár IV.
FÜGGVÉNYEK · JÓL FELKÉSZÜLTEM-E?
GONDOLAT

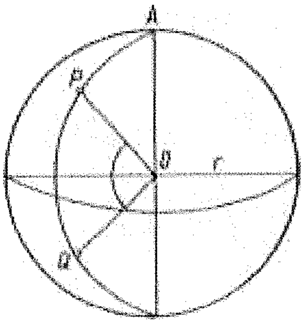

Rábai Imre
KÉSZÜLJÜNK EGYÜTT MATEMATIKÁBÓL!
GONDOLAT


Rábai Imre
felvételi és próbafelvételi feladatok
1999-2000
matematikai füzetek I.

Rábai Imre: Gömbháromszögtan
(*A kultúra világa – Matematika, fizika, kémia, Közgazdasági és jogi könyvkiadó, 1964*)

GÖMBI TÁVOLSÁG

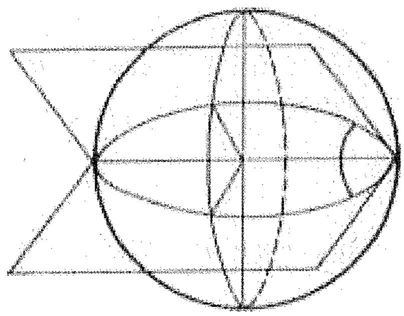
Legyen adott a gömbfelület két pontja, *P* és ***Q***. Ha ezek a gömb középpontjával, *O*-val egy egyenesbe esnek, *P*-t és ***Q*-t *átellenes pontoknak,*** nevezzük. Ha *P* és ***Q*** nem átellenes pontok, rajtuk keresztül csak egy főkör megy, melyet az ***OPQ*** sík a gömbfelületen kimetsz.



(A főkör olyan gömbi kör, melynek sugara megegyezik a gömb sugarával.) Két nem átellenes pont tehát egyértelműen meghatároz egy főkört. E főkörnek a *P* és ***Q*** közötti kisebbik ívét a *P* és ***Q*** pontok gömbi távolságának nevezzük. Két átellenes pont távolságán félfőkörívet értünk. A $\overline{PQ}$ ív hossza: $\overline{PQ}$ = ***rPOQ∠***, ahol *r* a gömb sugara.

Ha ugyanazon gömb különböző pontjainak távolságát hasonlítjuk össze, a gömb sugarát egységnyinek vehetjük, így a gömbi távolságokat szögekkel fejezhetjük ki. A gömbön a távolságmérés tehát szögmérés. A szögeket fokokban vagy radiánban is mérhetjük.

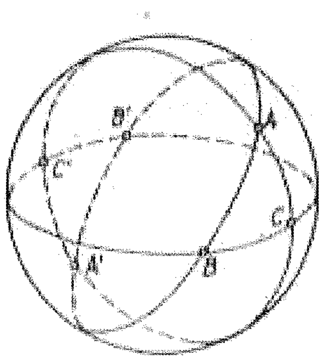
A gömbfelületen a főkörívek játsszák ugyanazt a szerepet, mint síkban az egyenesek. Eltérés van abban, hogy két főkör egymást két (átellenes) pontban metszi. Így ún. gömbkétszög jön létre. A gömbkétszöget határoló fél-főköröket, a gömbkétszög oldalainak nevezzük. Ezek 180°-kal egyenlők.



Két egymást metsző főkörív által bezárt szögön a metszéspontjukban húzott érintők hajlásszögét értjük. Ez a szög megegyezik a főköríveket kimetsző két sík által bezárt lapszöggel. Ennek a szögnek a meghatározása akkor válik egyértelművé, ha pl. a főköríveken adunk meg haladási irányt, és a szögön egy olyan elforgatás nagyságát értjük, mellyel az egyik főkörív, haladási irányával együtt átmegy a másik főkörívbe.

A középpontban a főkör síkjára merőleges egyenes a gömbfelületen két átellenes pontot metsz ki. Ezt a két pontot a főkör pólusainak nevezzük, a főkört pedig bármely pólusa polárisának. Az a pólus, mely a főkörön adott bejárási értelemben haladva bal kéz irányában fekszik, a bal oldali pólus. Két főkör által bezárt szög egyenlő a megfelelő pólusaik által bezárt szöggel, azaz a pólusok gömbi távolságával.

GÖMBHÁROMSZÖG



Egy háromélű testszöglet (triéder), ha csúcsa a gömb középpontja, a gömbfelületből ***gömbháromszöget*** vág ki. A gömbháromszöget határoló ívek a gömb- háromszög***oldalai,*** az ívek közös pontjai a gömbháromszög csúcsai, az oldalak által bezárt belső szögek "a gömbháromszög szögei. Most csak az ún. Euler-féle gömbháromszögekkel foglalkozunk, amelyekben minden oldal és szög kisebb, mint 180°.

Az ***ABC*** gömbháromszög oldalainak meghosszabbításai egymást a háromszögön kívül fekvő ***A', B'*** és ***C'*** pontokban metszik. A gömbfelületet a három főkör nyolc gömbháromszögre osztja. A csúcsok átellenes pontjai által alkotott ***A'B'C'*** háromszög az ***ABC*** háromszög ***átellenes háromszöge.*** Az ***A'BC, AB'C, ABC'*** háromszögek, melyeknek egy-egy oldala közös az ***ABC*** háromszöggel, az ***ABC*** háromszög ***mellékháromszögei.***

Az átellenes háromszögek megfelelő oldalai és szögei egyenlők, a mellékháromszög közös oldalai és ezen oldalakkal szemközt fekvő szögei egyenlők, a többi oldalak és. szögek egymást 180°-ra egészítik ki.

A gömbháromszög minden oldalához két pólus tartozik. Járjuk be az oldalakat ***ABCA*** sorrendben és vegyük a baloldali pólusokat, melyek egy gömbháromszöget, az eredeti gömbháromszög ***polárgömbháromszögét*** határozzák meg. Bármely gömbháromszög a saját polárgömbháromszögének polárgömbháromszöge. Igazolható, hogy a polárgömbháromszögek egyikének az oldalai a másiknak a megfelelő szögeit 180°-ra egészítik ki.

A gömbfelületen a gömbháromszög oldalait kimetsző triéder lapszögei a gömbháromszög szögeivel, élszögei a gömbháromszög oldalaival egyenlők. Így a triéderre bizonyított tételek érvényesek a gömbháromszögekre.

Egy gömbháromszög két oldalának összege a harmadik oldalnál nagyobb.

A főkörív tehát az a legrövidebb távolság, amellyel két pont a gömbfelületen összeköthető.

A gömbháromszög oldalainak összege kisebb 360°-nál.

Ha ezt a tételt a polárgömbháromszög oldalaira alkalmazzuk, úgy kapjuk: A gömbháromszög szögeinek összege nagyobb 180°-nál (és kisebb 540°-nál). Ugyanis, ha a, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ egy gömbháromszög oldalai és α, β, γ a szögei, akkor a polárgömbháromszög oldalai $180° - \alpha$; $180° - \beta$; $180° - \gamma$; tehát ha $a + b + c < 360°$, akkor $180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma < 360°$, vagy más alakban

$$\alpha + \beta + \gamma > 180°.$$

A gömbháromszögre, a síkháromszögekhez hasonlóan, sok tételt írhatnánk fel, ezekkel itt nem foglalkozunk, egyeseket viszont bizonyítás nélkül felhasználunk. (Pl. itt is érvényes, hogy nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög fekszik és ennek megfordítása.)

A GÖMBKÉTSZÖG ÉS GÖMBHÁROMSZÖG FELSZÍNE

Egy gömb gömbkétszögeinek felszíne a szögükkel arányos. Így ha a gömbkétszög szöge α (radiánban), akkor

$\alpha : \pi = F_\alpha : 2\pi r^2$ (ahol F_α a gömbkétszög felszíne, r pedig a kör sugara). Ebből

$$\boldsymbol{F_\alpha} = 2\alpha r^2.$$

Az átellenes gömbháromszögek felszíne egyenlő.

Legyen az ***ABC*** gömbháromszög felszíne $\boldsymbol{F}$, az ***A'BC, AB'C, ABC'*** mellékgömbháromszögek felszíne rendre F_1, F_2, F_3. Így

$$\begin{aligned} F + F_1 &= r^2\alpha \\ F + F_2 &= r^2\beta \\ F + F_3 &= r^2\gamma \\ \hline 3F + F_1 + F_2 + F_3 &= r^2(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

Az egész gömb felszíne nyolc, páronként átellenes gömbháromszög felszínének összege: $2\cdot(F + F_1 + F_2 + F_3) = 4r^2\pi$. Ezt felhasználva

$$2\boldsymbol{F} = 2r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

$$\boldsymbol{F} = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Az $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ ***értékét*** *gömbi feleslegnek (szférikus excesszus)* ***nevez***zük, és ε-nal jelöljük. $\boldsymbol{F} = r^2\varepsilon$.

A GÖMBHÁROMSZÖG MEGOLDÁSA

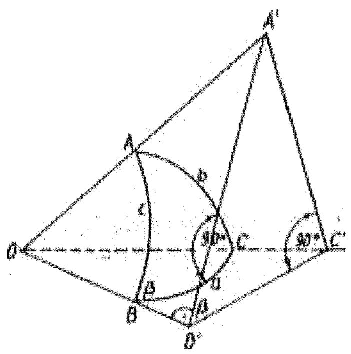
A gömbháromszög hat alapadata (3 oldal, 3 szög) közül bármely három a többit egyértelműen meghatározza, ha eleget tesznek az oldalakra és szögekre vonatkozó összefüggéseknek, amelyekre az előző pontban utaltunk. Egy kivételes eset van, ha két szög vagy két oldal derékszög (pl. $\boldsymbol{a} = 90°$, $\boldsymbol{b} = 90°$ esetén $\gamma = \boldsymbol{c}$ és $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$). A gömbháromszögben három szög független adat, mely a gömbháromszöget meghatározza. A gömbfelületen nincsenek hasonló háromszögek.

Itt csak néhány megoldási esettel foglalkozunk. Először a derékszögű gömbháromszögek megoldását vizsgáljuk.

Egy gömbháromszög és a polárgömbháromszög adatai közötti kapcsolat alapján ha az oldalakra találunk valamilyen összefüggést, úgy ezt a polárgömbháromszögekre alkalmazva, a szögekre is kapunk összefüggést.

A DERÉKSZÖGŰ GÖMBHÁROMSZÖG

Legyen az ***ABC*** gömbháromszögben $\gamma = 90°$, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ oldalak hegyesszögek. A gömbháromszög triéderét egészítsük ki az *OA'B'C'* tetraéderré, egy olyan síkkal való metszéssel, mely *B'*-ben merőleges az ***OB'***-re, így az *OB'C'* síkra is.



A'B' és ***B'C'*** merőleges ***OB'***-re. ***A'C'*** merőleges *OC'*-re, tehát az ***OB'A'***; ***OC'A'***; ***OB'C'*** síkháromszögek derékszögűek (a derékszögek a középső betűk által jelzett csúcsoknál vannak). Az ***OB'A'*** háromszögben az ***A'B'*** befogóval szemközti szög a gömbháromszög *c* oldala, így

$$\cos c = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OA'} = \cos a \cdot \cos b .$$

Az $\frac{OB'}{OC'}$ és a $\frac{OC'}{OA'}$ arányokat az ***OB'C'*** és ***OCA'*** derékszögű háromszögekből fejeztük ki. A kapott

$\cos c = \cos \boldsymbol{a} \cdot \cos \boldsymbol{b}$

képlet a derékszögű gömbháromszög oldalai között állapít meg összefüggést, ezért a ***gömbháromszögtan Pitagorasz-tételé***nek nevezik.

Egy hegyesszög sinusa kifejezhető két oldal sinusának arányával.

$$\sin\beta = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{B'C'}{OB'} : \frac{A'B'}{OB'} = \frac{\sin b}{\sin c} .$$

Hasonlóan $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$.

A szög cosinusára a következőt kapjuk:

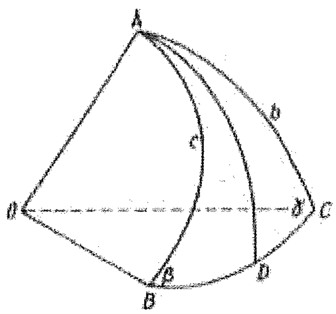
$$\cos\beta = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{B'C'}{OB'} : \frac{A'B'}{OB'} = \frac{\mathrm{tg}\, a}{\mathrm{tg}\, c} .$$

Hasonlóan $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, c}$.

Ha az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ oldal nem hegyesszögek, akkor a mellékgömbháromszög oldalai már igen. Erre alkalmazva a kapott összefüggéseket beláthatjuk, hogy tompaszög esetén is érvényben maradnak.

A GÖMBHÁROMSZÖGTAN SINUS-TÉTELE

Legyen ***ABC*** egy derékszöget nem tartalmazó gömbháromszög, így ***OA*** nem merőleges az ***OBC*** síkra. Az ***OA*** egyenesen át az ***OBC*** síkra csak egy merőleges sík fektethető. Ez a sík



a gömbfelületen kimetsz egy főkört, mely átmegy ***A***-n, és messe a ***BC*** oldalt D-ben. Az ***AD*** gömbi távolság az ***ABC*** gömbháromszöget két derékszögű gömbháromszögre bontja (az ***ADC∠*** és ***ADB∠*** derékszög). Az ***ABD*** és ***ACD*** derékszögű gömbháromszögben

$$\sin\beta = \frac{\sin\overline{AD}}{\sin c}, \qquad \sin\gamma = \frac{\sin\overline{AD}}{\sin b}$$

Az egyikből sin ***AD***-t kifejezve és a másikba helyettesítve $\sin\beta : \sin\gamma = \sin \boldsymbol{b} : \sin c$ összefüggést kapjuk. Ugyanígy

$\sin\alpha : \sin\beta = \sin a : \sin \boldsymbol{b}$, vagy együtt a kettő:

$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin \boldsymbol{b} : \sin \boldsymbol{c}$.

A gömbháromszög szögeinek sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő oldalak sinusai. Ez a gömbháromszögtan sinus-tétele.

Ha adott két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög, úgy a sinus-tétellel kiszámítható a kisebbel szemközti szög.

A megoldás során a szög sinusa a szöget még nem határozza meg egyértelműen, hiszen $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$. Ezért azt a szöget kell választani, amelyik esetében teljesült a „nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik" tétel. Ha a kisebbikkel szemközti szög adott, akkor a síkháromszögtanhoz hasonlóan 0, 1 vagy 2 megoldást kaphatunk. Ugyanez a meggondolás érvényes, ha két szög és valamelyikkel szemben fekvő oldal adott.

A GÖMBHÁROMSZÖGTAN COSINUS-TÉTELE

Az előbb kapott ***ADB*** és ***ADC*** derékszögű gömbháromszögekre alkalmazhatjuk a megismert Pitagorasz-tételt.

$$\cos c = \cos\overline{BD}\cdot\cos\overline{AD}$$

$$\cos b = \cos\overline{CD}\cdot\cos\overline{AD}$$

Elosztva egymással a két egyenletet

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos\overline{BD}}{\cos\overline{CD}} = \frac{\cos\left(a-\overline{CD}\right)}{\cos\overline{CD}} = \frac{\cos a\cdot\cos\overline{CD} + \sin a\cdot\sin\overline{CD}}{\cos\overline{CD}}$$

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a\cdot\operatorname{tg}\overline{CD}.$$

Az ***ADC*** háromszögből $\cos\gamma = \dfrac{\operatorname{tg}\overline{CD}}{\operatorname{tg} b}$, amiből $\operatorname{tg}\overline{CD} = \operatorname{tg} b\cdot\cos\gamma$.

Így $\dfrac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a\cdot\operatorname{tg} b\cdot\cos\gamma$, ebből

$\cos c = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma$. Hasonlóan

$\cos a = \cos b\cdot\cos c + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha$,

$\cos b = \cos a\cdot\cos c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta$.

Ez a gömbháromszögtan oldalakra vonatkozó cosinus-tétele.

Ennek a tételnek a segítségével három adott oldalból meghatározhatjuk a szögeket, továbbá két oldalból és a közbezárt szögből meghatározhatjuk a harmadik oldalt.

Ha a polárgömbháromszögre alkalmazzuk a tételt, úgy a szögekre vonatkozó cosinus-tételt kapjuk.

$\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$,

$\cos\beta = \cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos b$,

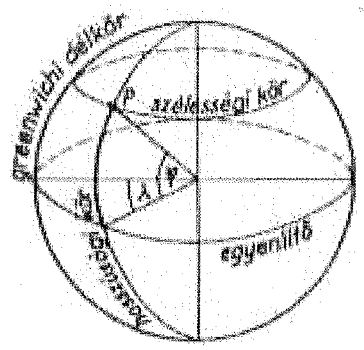
$\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos c$.

Ennek a tételnek a segítségével három adott szögből meghatározhatjuk az oldalakat, továbbá egy oldalból és a rajta fekvő két szögből a harmadik szöget.

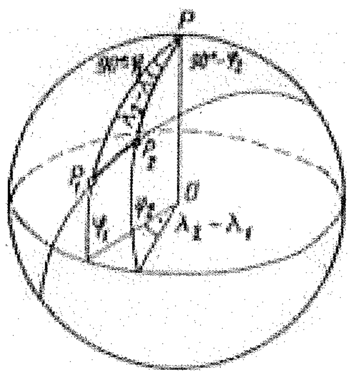
A gömbháromszögekre az itt megismert sinus- és cosinus-tételeken kívül – a síkháromszögekhez hasonlóan – igen sok összefüggés ismeretes, amelyekkel itt nem foglalkozhatunk.

TÁVOLSÁGMEGHATAROZÁS A FÖLDGÖMBÖN

A föld felületén helymeghatározás céljára koordináta-rendszert vezethetünk be. A tengelyeket két egymásra merőleges főkör alkotja, melyeket tetszés szerint választhatunk meg. A föld forgása által kitüntetett főkör a forgástengelyre merőleges – egyenlítő. Ezt választjuk egyik tengelynek. Az erre merőleges főkörök egymást a föld északi és déli pólusaiban metszik (Északi és Déli sarok). Ezeket a főköröket ***délköröknek*** vagy hosszúsági köröknek nevezzük, közülük nemzetközi megállapodás szerint a greenwichit (Greenwich, London külvárosa, ahol 1675–1948-ig csillagvizsgáló működött) választjuk másik tengelynek.



A P pont helyzetét a következő két koordináta határozza meg:



1. a P-n átmenő délkörnek a P és az egyenlítő közötti íve. Ez a P pont ***földrajzi szélessége (φ).*** Az északi féltekén pozitív, a délin negatív 0° és 90° közötti érték.

2. Az egyenlítőnek a 0-ik (greenwichi) és a P ponton átmenő délkörrel való metszéspontjai közötti íve. Ez a P pont ***földrajzi hosszúsága*** (λ). Greenwichtől keletre pozitív, nyugatra negatív 0° és 180° közötti érték.

Ha $\boldsymbol{P_1}$ és P_2 pontok $\boldsymbol{\varphi_1}$ és $\boldsymbol{\varphi_2}$ koordinátáit ismerjük, akkor a P_1P_2 távolság meghatározható a $\boldsymbol{P_1PP_2}$ háromszögből.

Ebben $\overline{PP_1} = 90° - \varphi_1$; $\overline{PP_2} = 90° - \varphi_2$; a kettő által bezárt szög $\lambda_2 - \lambda_1$. A cosinus-tétel szerint:

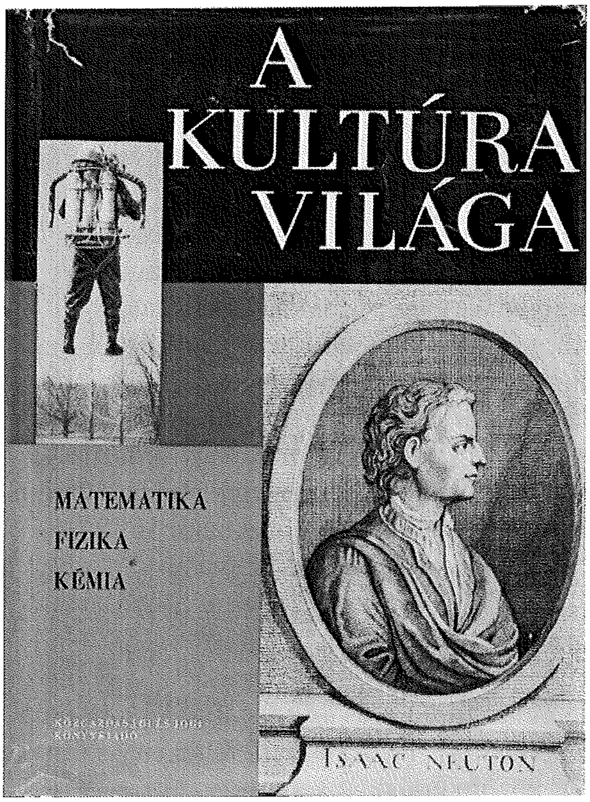
$$\cos\overline{P_1P_2} = \cos(90° - \varphi_1)\cdot\cos(90° - \varphi_2) + \sin(90° - \varphi_1)\cdot\sin(90° - \varphi_2)\cdot\cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

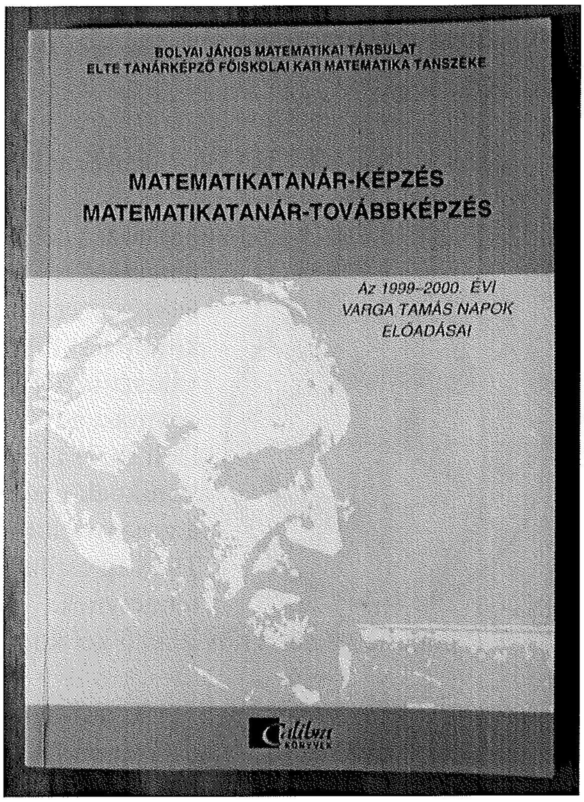
Tehát

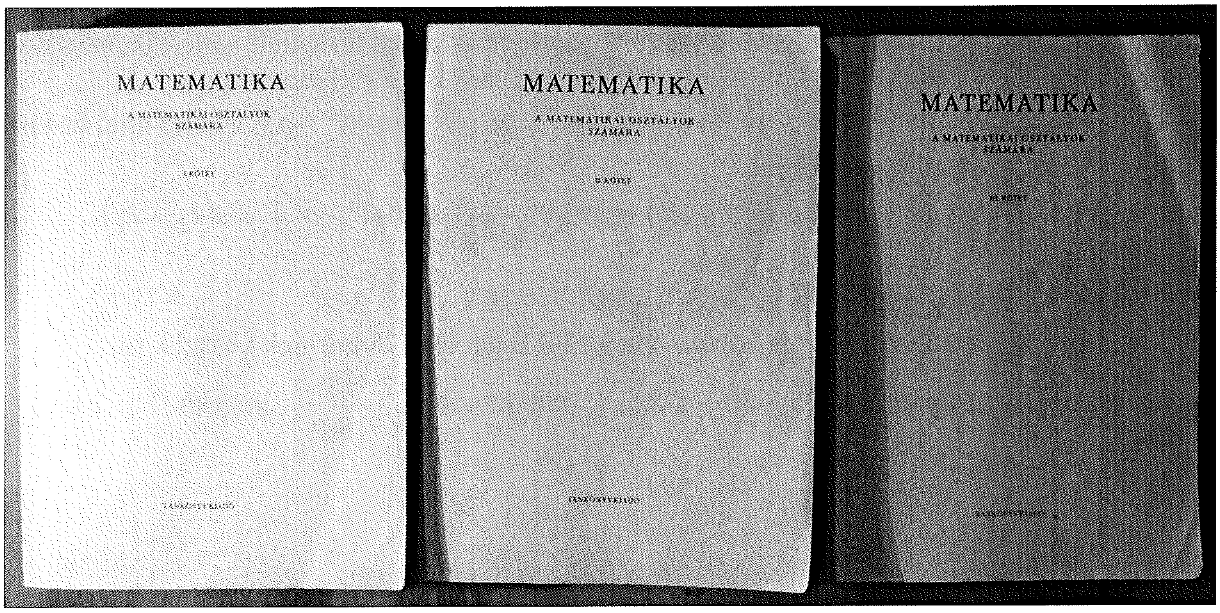
$$\cos\overline{P_1P_2} = \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\cos\beta(\lambda_2 - \lambda_1).$$

A P_1P_2 szög (a távolság) kifejezhető. Ha a föld sugarát 6378 km-nek vesszük (az Egyenlítő sugarának hossza 6378,2 km), akkor 1°-nak megfelel $\frac{6378\cdot\pi}{180°}$ km (kb. 111,2 km) távolság.

Például:
Határozzuk meg Berlin és Buenos Aires földgömbi távolságát.
Berlin: $\varphi_1 = 52°30'$ Buenos Aires: $\varphi_2 = -34°36'$
$\lambda_1 = 13°24'$ $\lambda_2 = = -58°22'$
A távolságot d-vel jelölve:
$\cos \boldsymbol{d} = -\sin 34°36'\cdot\sin 52°\,30' + \cos 34°36'\cdot\cos 52°30'\cdot\cos 71°46'$,
$\cos \boldsymbol{d} = -0{,}4505 + 0{,}1568$, $\cos \boldsymbol{d} = -0{,}2937$, $\boldsymbol{d} = 107{,}08°$.
Tehát a távolság: 107,08·111,2 km = 11 907 km.


A
KULTÚRA
VILÁGA
MATEMATIKA
FIZIKA
KÉMIA


BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
ELTE TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLAI KAR MATEMATIKA TANSZÉKE
MATEMATIKATANÁR-KÉPZÉS
MATEMATIKATANÁR-TOVÁBBKÉPZÉS
Az 1999–2000. ÉVI
VARGA TAMÁS NAPOK
ELŐADÁSAI


MATEMATIKA
A MATEMATIKAI OSZTÁLYOK SZÁMÁRA
MATEMATIKA
A MATEMATIKAI OSZTÁLYOK SZÁMÁRA
TANKÖNYVKIADÓ
MATEMATIKA
A MATEMATIKAI OSZTÁLYOK SZÁMÁRA