Mérőlapok felvételire I.
1979. január

1. Egy a oldalú négyzet két szemközti oldalára „befelé" állítsunk egyenlő oldalú háromszögeket. Fejezzük ki a-val e két háromszög közös részének területét!

2. Oldjuk meg az

$$x^2 = y + 2,$$
$$y^2 = x + 2$$

egyenletrendszert!

3. Számítsuk ki a derékszögű háromszög szögeit, ha $5r = 2R$, ahol r a beírt, R pedig a körülírt kör sugara!

4. A $2x - y = 10$ egyenletű egyenesen határozzuk meg azt a pontot, amelynek a P és a Q pontoktól való távolságának összeg a legkisebb, ha

$P(-5; 0)$ és $Q(-3; 4)$.

5. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\lg^2(4-x) + \lg(4-x)\lg\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

6. Egy háromszög területe $t = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$, ahol a, illetve b a háromszög két oldalának a hossza. Számítsuk ki a háromszög szögeit!

7. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \frac{x-4}{a+1} - \frac{a+2}{x-4}$$

függvénynek legyen zérushelye.

8. Oldjuk meg a

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}} = \sin x + \cos x$$

egyenletet!

1984. január

Az 1983-as évben új felvételi rendszer kezdődött. Ennek egyik lényeges eleme, hogy a gimnáziumokból jelentkezőknek a III. és a IV. osztályban év végén szerzett matematika, magyar nyelv és irodalom, történelem, idegen nyelv, fizika (biológia, kémia, földrajz, másik idegen nyelv – a tanuló választása szerint) érdemjegyei kerülnek beszámításra.

Ezek szerint a felvételi vizsga összpontszámát a fent említett „hozott pontok" és a felvételi pontok összege adja. Így a hozott pontok száma maximum 60, a szerezhető (írásbeli és szóbeli együtt) 60, azaz, összesen 120 pont.

Matematikából közös érettségi-felvételi írásbeli vizsgák lesznek, ezek 8, fokozatosan nehezedő feladatból állnak.

Ehhez hasonló az alábbi feladatsor. Tanácsoljuk a megoldóknak, hogy a megoldást időre végezzék el. A megoldásra és leírásra fordítható idő összesen 180 perc.

*

1. Három szám egy számtani sorozat három egymást követő eleme, a középső szám 2. Határozzuk meg a másik két számot, ha a számok négyzete egy mértani sorozat három egymást követő eleme!

2. a) Számítsuk ki tg $15°$ pontos értékét!

b) Egy derékszögű háromszög a és b befogói között az $(a-b)^2 = 2ab$ összefüggés áll fenn. Számítsuk ki a háromszög hegyesszögeinek pontos értékét!

3. Tekintsük az $x^2 + mx - 2m^2 + 3m - 1 = 0$ egyenletet, ahol m valós paraméter.

a) Határozzuk meg m értékét úgy, hogy az egyenlet egyik gyöke a másik gyökének kétszerese legyen!

b) Határozzuk meg m értékét úgy, hogy az egyenlet két gyökének szorzata a legnagyobb legyen!

4. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x + y = 0$ egyenletű egyenest az origóban érinti, és érinti az $x = 1$ egyenletű egyenest is!

5. A k_1 és k_2 körök kívülről érintik egymást az A pontban. A két kör egyik közös érintője a k_1 kört az E_1, a k_2 kört az E_2 pontban érinti. Számítsuk ki a körök sugarát, ha $AE_1 = 8$ és $AE_2 = 6$ egység!

6. Melyek azok az x valós számok, amelyekre a

$$\frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1},$$

kifejezés értéke nagyobb, mint 1 és legfeljebb 2?

7. Egy forgáskúp alapkörének sugara megegyezik a kúp magasságával. A forgáskúpba írjunk olyan forgáshengert, amelynek magassága megegyezik alapkörének átmérőjével. Számítsuk ki, hogy a henger felszíne, illetve térfogata hány százaléka a kúp felszínének, illetve térfogatának!

8. Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy a

$$\text{tg } 2x = m \text{ ctg } x$$

egyenletnek legyen megoldása!

Oldjuk meg az egyenletet, ha $m = 1$.

1988. november

Az itt kitűzött feladatok jellegükben hasonlók a felvételiken szereplő feladatokhoz, ezért jó gyakorlási lehetőséget adnak azoknak, akik felvételi vizsgára készülnek. Célszerű a feladatokat időre megoldani. A felvételiken 180 perc a megoldási idő. A feladatok teljes megoldását nem közöljük. A feladatok végeredményét és néhány jó tanácsot, amire a megoldás során ügyelni kell, lapunk legközelebbi számában közlünk.

1. Oldja meg a következő egyenletet és egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{4x+x^2}=4-x$; b) $\sqrt{4x+x^2}<4-x$; c) $\sqrt{4x+x^2}>4-x$.

2. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 1, illetve 4 egység, szárainak hossza 2, illetve 3 egység. Számítsa ki a trapéz átlóinak hosszát!

3. Oldja meg az

$$x^2-xy-2y^2=0,$$
$$2x^2+y^2+\sqrt{2x^2+y^2}=12$$

egyenletrendszert!

4. Állapítsa meg, hogy az a paraméter mely értékeire lesznek az

$$x^2-2ax+2a^2-3a=0$$

egyenlet gyökei valósak, és ezek közül melyik a-ra veszi fel az $(x_1-x_2)^2$ a legnagyobb értékét, ahol x_1 és x_2 az adott egyenlet gyökei !

5. Az $ABCD$ négyzet C csúcsa az y tengelyre esik, a vele szemközti csúcs $A(2,2)$. A négyzet területe 20 területegység. Számítsa ki a négyzet ismeretlen csúcspontjainak koordinátáit!

6. Oldja meg a

$$3(\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x)=2\mathrm{tg}2x$$

egyenletet!

7. Egy mértani sorozat első eleme 3, az első n elem összege 33, az első n elem reciprokának összege $\frac{11}{48}$. Számítsa ki a sorozat első n elemét!

8. Szabályos négyoldalú gúlába olyan kockát írunk, amelynek négy csúcsa a gúla alaplapján, a másik négy csúcsa pedig a gúla oldalélén van. Igazolja, hogy

$$V_1\le\frac{4}{9}V,$$

ahol V_1 a kocka, V pedig a gúla térfogata. Milyen feltételek mellett teljesül az egyenlőség?

1992. január

1. Egy derékszögű háromszög befogóihoz tartozó súlyvonalak hossza 3, illetve 4 egység. Számítsa ki az átfogóhoz tartozó súlyvonal hosszát.

2. Az ABC háromszög A és C csúcsán átmenő kör az AB oldalt olyan D, a BC oldalt olyan E pontban metszi, hogy

$$CE = 1, \quad CD = BE = 4 \qquad \text{és} \quad AD = 4BD.$$

Számítsa ki a háromszög területét.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \leq 2$$

egyenlőtlenséget.

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{16\cos^4\frac{x}{2} - 7\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2\cos x + 1.$$

5. Az $ABCDE$ gúla alaplapja az $ABCD$ téglalap. $AB = 5$, $BC = 2$, $EA = 3$, $EB = 4$ egység. Számítsa ki a gúla EC és ED éleinek hosszát, ha a gúla térfogata a lehető legnagyobb. Mekkora a gúla térfogata?

6. Az $x + y = 20$ egyenletű egyenesnek az x, illetve y tengellyel való metszéspontját jelölje A, illetve B, az origót jelölje 0. Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos az $x = 3y$ egyenletű egyenessel, metszi az OB szakaszt a C, az AB szakaszt a D pontban, és amelyre az $OADC$ négyszög területe 104 területegység.

7. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$(2x)^2 - 4x\sqrt{m \cdot 2^m} + 2^{m+1} + m - 2 = 0$$

egyenletet, ahol m valós paraméter.

8. Oldja meg az

$$\begin{aligned} x^2 &= y + z + 2, \\ y^2 &= z + x + 2, \\ z^2 &= x + y + 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert a valós számhármasok halmazán.

1997.10

Hajnal Imre tanár úr emlékére
1

Hajnal Imre (1926–1996) az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematika–fizika szakos középiskolai tanári oklevelet. A hódmezővásárhelyi Bethlen Gábor Gimnáziumban, a szegedi Szakérettségis kollégiumban, a szegedi Ságvári Endre Gimnáziumban volt tanár. Matematika szakfelügyelőként is dolgozott. Eredményesen tanított a speciális matematika tantervű osztályokban. Középiskolák részére írt tankönyveit, a könyvekhez írt tanári segédkönyveit és egyéb matematika szakkönyveit remélhetően sokáig fogják használni.

1. Egy háromszög két oldalának összege 14 egység, a harmadik oldalon fekvő szögek 30°, illetve 70° nagyságúak. Számítsa ki az oldalak hosszát, a háromszög területét, a háromszög köré, illetve háromszögbe írható kör sugarát!

2. Egy számtani sorozat első tagja 30, differenciája (-3). Számítsa ki a sorozatnak azt a tagját, amely az előtte levő tagok összegének a nyolcad része!

3. Az $ABCD$ trapéz egyik párhuzamos oldala $DC = 8$ egység, a szárak hossza $AD = 4\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{10}$ egység; a $BAD\sphericalangle = 60°$. Számítsa ki a trapéz területét!

4. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$2\sqrt{\frac{5x}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{5x}} = 3, \qquad (y+4x)(x-y+20) = 0$$

egyenletrendszer!

5. Igazolja, hogy a

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

összefüggés minden háromszögre igaz!

6. Az $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 32$ egyenletű körből az origón áthaladó e egyenes 8 egység hosszú húrt metsz ki. Írja fel az e egyenes egyenletét, és számítsa ki a kimetszett húr végpontjainak koordinátáit!

7. Határozza meg, hogy az a paraméter mely értékeinél van a

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$$

egyenletnek megoldása. Oldja meg az egyenletet, ha $a = \frac{1}{2}$ és ha $a = -\frac{3}{2}$.

8. Az e és f párhuzamos egyenesek távolsága $4\sqrt{2}$ egység. Az e egyenesen vegyük fel az A és B pontokat úgy, hogy $AB = 3\sqrt{2}$ egység legyen. Az f egyenesen vegyünk fel egy C pontot. Legyen P az AC szakasz egy pontja, a BP egyenes D pontban metszi az f egyenest. Az e egyenestől mekkora távolságra fekszik a P pont, ha az ABP és a PCD háromszögek területének összege a lehető legkisebb? Mekkora ez a legkisebb terület?

Rábai Imre

2000. február

Radó János igazgató úr (barátom) emlékére

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán ($\mathbf{R}^2$) a következő egyenletrendszert:

$$x^2 - y^2 = 2(x - y), \qquad x^2 + y^2 = 5(x + y).$$

2. Egy mértani sorozat első és ötödik elemének szorzata 144, a második és a negyedik elem különbsége 18. Számítsa ki a sorozat első elemét és hányadosát.

3. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és érinti az $x + y = 1$ egyenletű egyenest is.

4. Állapítsa meg, hogy az m valós paraméter mely értékeire lesznek a

$$2x^2 + (2 - 2m)x + (m^2 - 4m + 1) = 0$$

egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre az $x_1 \cdot x_2$ kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökeit jelentik.

5. Legyen $x > 0$, $y > 0$ és $x + y = 4$. Igazolja, hogy

$$\left(3 + \frac{1}{x}\right)\left(3 + \frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

6. Egy háromszög két oldalának hossza 12, illetve 24 egység. A közbezárt szög szögfelezője 8 egység. Számítsa ki a két oldal által bezárt szöget és a harmadik oldalt.

7. Az $ABCD$ négyzet *AB oldalegyenesének* egy P pontja a C, illetve a D csúcsoktól 5, illetve $\sqrt{17}$ egység távolságra van. Mekkora a négyzet oldala? Hol helyezkedik el a P pont?

8. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$4\cos^2 x - 4\sin x \cdot \sin y - 5 = 0$$

kétismeretlenes egyenletet.

Rábai Imre

1988. november

1. a) $x = \frac{4}{3}$; b) $x \leq -4$ vagy $0 \leq x < \frac{4}{3}$; c) $x > \frac{4}{3}$.

2. Az átlók hossza $\sqrt{\frac{44}{3}}$, illetve $\sqrt{\frac{19}{3}}$ egység.

3. Mindkét egyenlet valamire nézve másodfokú. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -2$, $y_2 = -1$; $x_3 = \sqrt{3}$, $y_3 = -\sqrt{3}$; $x_4 = -\sqrt{3}$, $y_4 = \sqrt{3}$.

4. Az egyenlet D diszkriminánsa $D = -4(a^2 - 3a) \geq 0$, ha $0 \leq a \leq 3$; ekkor valósak az adott egyenlet gyökei.

Most $p(a) = (x_1 - x_2)^2 = (D =) 9 - 4\left(a - \frac{3}{2}\right)^2$. Ez $a = \frac{3}{2}$ esetén a legnagyobb $\left(0 < \frac{3}{2} < 3\right)$, így $p(a)$ legnagyobb értéke 9.

5. Dolgozhatunk paraméter alkalmazásával vagy a megfelelő szerkesztés lépéseit számítással követve. A megoldás során alkalmazhatjuk vektorok 90°-os elforgatását, valamint összeadását.

A feltételeknek két négyzet felel meg :
$B_1(4; 6)$, $C_1(0; 8)$, $D_1(-2; 4)$, illetve $B_2(4; -2)$, $C_2(0; -4)$, $D_2(-2; 0)$.

6.
$$x_{1,n} = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in Z, \quad x_{2,k} = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z.$$

7. Mivel $q \neq 1$ ($q = 1$ nem felel meg a feltételeknek), ezért $q = -2$, $n = 5$ adódik. A sorozat első n eleme:

$$3, -6, 12, -24, 48.$$

8. Ha a gúla alapéle a, magassága m, a kocka éle b, akkor $b = \frac{am}{a+m}$, így azt kell igazolni,hogy

$$\left(\frac{am}{a+m}\right)^3 \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2 m}{3}.$$

Ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(a + 4m)(2a - m)^2 \geq 0,$$

így igaz az állítás. Az egyenlőség $m = 2a (3b = 2a)$ esetén teljesül. A feladat differenciálszámítás, valamint három pozitív szám számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséggel is megoldható.

1992. január

1. A befogókat ezúttal $2a$ és $2b$-vel, az átfogót $2c$-vel jelölve a keresett súlyvonal hosszára $s_c^2 = c^2 = a^2+b^2$. Az adatokból Pitagorasz tételével $s_a^2 = a^2+4b^2 = 9$ és $s_b^2 = 4a^2+b^2 = 16$, összegük ötödrésze $a^2+b^2=5$, tehát $s_c = \sqrt{5}$ egység. – Célhoz értünk a befogók külön-külön való kiszámítása nélkül is.

2. A körhöz B-ből húzott két szelő szakaszainak szorzata egyenlő, $BA \cdot BD = (BD+DA) \cdot BD = = 5BD^2 = BE \cdot BC = 4 \cdot (4+1) = 20$, innen $BD = 2$ és $BA = 10$. A $\beta = ABC\sphericalangle = DBC\sphericalangle$-re a DBC háromszögből $\cos\beta = 13/20$. A keresett terület

$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin\beta = 5\sqrt{231}/4 \approx 19,0 \text{ területegység.}$$

Mérethű ábra szerkesztése: 1. oldalaiból a BCD háromszög, 2. az E osztópont, 3. kör a C, D, E pontokon át, végül 4. ebből BD kimetszi A-t.

3. A bal oldalnak akkor van értelme, ha egyrészt az alap $x+1>0$, de $x+1 \neq 1$, azaz $x > -1$, de $x \neq 0$, és ekkor a jobb oldalon $2 = \log_{x+1}(x+1)^2$, másrészt ha a zárójelben $2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)\cdot(x-1)$ pozitív, ez kizárja a $0,5 \leq x \leq 1$ értékeket.

Mármost ha az alapra $x+1>1$, azaz $x>0$, akkor a logaritmus-függvény monoton növő, a követelmény: $2x^2-3x+1 \leq (x+1)^2$, rendezve $x(x-5) \leq 0$, azaz $0 \leq x \leq 5$. Egybevetve a követelményeket, x megoldás, ha $0 < x < 0,5$ és ha $1 < x \leq 5$.

A bal oldal értéke pl. $x = 0,4$ mellett $\log_{1,4} 0,12 = (\lg 0,12) : (\lg 1,4) \approx -6,301$ és $x=3$ mellett $\lg_4 10 = 1,661$, valóban kisebbek, mint 2.

Ha pedig az alapra $0 < x+1 < 1$, azaz $-1 < x < 0$, akkor $2x^2 - 3x + 1 \geq (x+1)^2$, tehát ha $x \leq 0$ és ha $x \geq 5$. Egybevetve $-1 < x < 0$.

Az adott egyenlőtlenség teljesül, ha $-1 < x < 0,5$, de $x \neq 0$ és ha $1 < x \leq 5$.

4. A $\sin^2 \dfrac{x}{2} = 1 - \cos^2 \dfrac{x}{2}$ helyettesítés után a négyzetgyökjel alatt

$$\left(4\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)^2 = (2\cos x + 1)^2$$

áll, tehát az egyenlet

$$|2\cos x + 1| = 2\cos x + 1.$$

Ez teljesül, ha a jobb oldal nem negatív: $\cos x \geq -0,5$ és

$$\frac{-2\pi}{3} + 2n\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

5. Az EAB háromszögben E-nél derékszög van. E távolsága AB-től $EA \cdot EB/AB = 2,4$. A térfogat akkor a legnagyobb, ha e lap forgatásával E legmagasabbra jut, vagyis ha ez a lap merőleges az $ABCD$ alapra. Ekkor a térfogat $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2,4/3 = 8$ térfogategység. Ekkor EAD és EBC is derékszögű háromszögek, $ED = \sqrt{13}$, $EC = \sqrt{20}$ egység.

6. Az OAB egyenlő szárú derékszögű háromszög területe 200 területegység, a levágott BDC háromszögé 96 területegység. Legyen D abszcisszája d, vetülete

OB-re E, ekkor $BE = d$ és $EC = d/3$, ezekkel BDC területe $2d^2/3$, tehát $d = 12$. C kordinátája 4, a keresett egyenlet $y = x/3+4$, másképpen $x = 3y-12$.

7. A gyökvonás miatt csak $m \geq 0$-ról lehet szó, és ekkor $2^m \geq 1$. A diszkriminánsra $D/16 = m \cdot 2^m - 2^{m+1} - m + 2 = (m-2)(2^m - 1)$, a második tényező nem lehet negatív. $D = 0$ és két egyenlő gyök adódik, ha $m = 2$ – ekkor $x_{1,2} = \sqrt{2}$ – és ha $2^m - 1 = 0$, azaz $m = 0$, ekkor $x_{1,2} = 0$. $m > 2$ esetén két különböző valós gyök van:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{m \cdot 2^m} \pm \sqrt{(m-2)(2^m-1)}\right).$$

8. A három ismeretlen szerepe egyenrangú. Nullára redukálások után bármelyik két egyenlet különbsége szorzattá alakítható. Az első kettőből $(x-y)(x+y+1) = 0$, a megoldás kettéágazik aszerint, hogy
(1a) $x - y = 0$, azaz $x = y$ vagy (1b) $x + y + 1 = 0$.
Ezt ismételve a második és harmadik egyenletre:
(2a) $y - z = 0$ vagy (2b) $y + z + 1 = 0$.
Ezeknek az elsőfokú egyenleteknek a négyféle párbaállítása mellé bármelyiket vehetjük az eredeti másodfokú egyenletek közül, mindegyik esetben két megoldást kapunk. Az első kettőben $x = y = z$ és közös értékük $1 + \sqrt{3}$, illetve $1 - \sqrt{3}$. A további 3–3 megoldás az $1, 1, -2$ és a $-1, -1, 0$ számhármasok permutálásával adódik. Lényegében tehát négy különböző számhármas elégíti ki az egyenletrendszert.

Harmadszor nem ismételhettük volna a fenti fogást, gyökrendszert vesztenénk, mert az úgy adódó $x - z = 0$ egyenletet már megkaphatnánk, mint (1a) + (2a)-t is és mint (1b) – (2b)-t is.

1997. október

1. Legyen a 30°-os szöggel szemközti oldal x hosszúságú. Ekkor szinusztétellel $\frac{x}{14-x}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}$, $x\approx 4,86$, $14-x=9,14$ egység. A 80°-os szöggel szemközti oldal szintén szinusztétellel számítható ki, $y=9,57$ egység. A háromszög területe $T=21,87$ területegység, a háromszög köré írható kör sugara $r=x=4,86$ egység, a háromszög beírt körének sugara $\varrho=\frac{T}{s}=1,86$ egység, ahol s a háromszög kerületének a fele.

2. A feltétel szerint $a_1=30$, $d=-3$ és $8a_n=S_{n-1}$, azaz

$$8(30+(n-1)(-3))=\frac{n-1}{2}(60+(n-2)(-3)),$$

ahonnan $n^2-39n+198=0$, azaz $n=6$ vagy $n=33$.
Így $a_6=30+5\cdot(-3)=15$ és $a_{33}=30+32(-3)=-66$.

3. A trapéz magassága $m=4\sqrt{3}\sin 60^\circ=6$ egység. A C ponton át az AD-vel párhuzamos egyenes az AB egyenest E pontban metszi. Legyen $EB=x$. A CEB háromszögben a koszinusztétel alkalmazásával $40=48+x^2-2\cdot 4\sqrt{3}\cdot x\cdot\cos 60^\circ$, ahonnan $x^2-4\sqrt{3}x+8=0$, $x_1=2\sqrt{3}+2$, $x_2=2\sqrt{3}-2$ egység. A feltételeknek két trapéz felel meg, ezekben $(AB)_1=10+2\sqrt{3}$, $(AB)_2=6+2\sqrt{3}$ egység, így a területek: $T_1=54+6\sqrt{3}$, illetve $T_2=42+6\sqrt{3}$ területegység.

4. A második egyenletből $y=-4x$ vagy $x-y=-20$. Ha $y=-4x$, akkor $2\sqrt{\frac{5x}{5x}}+\sqrt{\frac{5x}{5x}}=3$, azaz minden 0-tól különböző x szám megoldás, tehát ekkor az $x=t$, $y=-4t$, $t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ számpárok a megoldások.

Ha $x-y=-20$, akkor $2\sqrt{\frac{5x}{-20}}+\sqrt{\frac{-20}{5x}}=3$, ahonnan $x_1=-4$, $x_2=-1$, így $y_1=16$, $y_2=19$. Ez a két számpár is megoldás. (Az $(x_1,\ y_1)$ számpár közte van az előbb kapott végtelen sok számpár között.)

5. A szinusztétel, majd a $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$ és a $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ azonosságok alkalmazásával, felhasználva, hogy $\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\neq 0$, adódik, hogy

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

(Az állítást geometriai ábra segítségével is igazolhatjuk.)

6. Az $r=4\sqrt{2}$ egység sugarú körben a 8 egység hosszú húrok a középponttól $d=4$ egység távolságra vannak. (Ezért az $x=0$ egyenletű egyenes megoldás.) Minden olyan egyenes egyenlete, amely átmegy az origón, $Ax+By=0$ alakban írható ($A^2+B^2>0$). A kör $(4;8)$ középpontja a keresett egyenestől 4 egység távolságra van, tehát

$$4=\frac{|4A+8B|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

amiből $\sqrt{A^2+B^2} = |A+2B|$, $B(3B+4A)=0$.

Ha $B=0$, akkor $A=1$ megfelel, így $x=0$ a keresett egyenes, és a metszéspontok $P_1(0;4)$, $P_2(0;12)$.

Ha $3B+4A=0$, akkor $A=3$, $B=-4$ megfelel, a keresett egyenes egyenlete $3x-4y=0$, a metszéspontok

$$P_3\left(\frac{16}{5};\frac{12}{5}\right),\qquad P_2\left(\frac{48}{5};\frac{36}{5}\right).$$

(A feladat sokféle módon, így trigonometria alkalmazásával is egyszerűen megoldható. Hogyan?)

7. Alkalmazhatjuk a

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

és a

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x),\quad \text{majd}\quad \cos^2 2x = 1-\sin^2 2x$$

azonosságokat. Rendezés után a $\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2 - 2a = 0$, azaz a $(\sin 2x - 1)^2 = 3+2a$ egyenletet kapjuk. Ennek akkor van megoldása, ha $0 \le 3+2a \le 4$, azaz ha $-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}$.

Ha $a=-\frac{3}{2}$, akkor $\sin 2x = 1$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, ha $a=\frac{1}{2}$, akkor $\sin 2x=-1$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

8. Legyen x a P pont távolsága az e egyenestől, ekkor $0\le x\le 4\sqrt{2}$. Az ABP és a CDP háromszögek hasonlósága folytán $\frac{DC}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{x} - x$, azaz $DC = 3\sqrt{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}-x}{x}$.

A szóbanforgó két háromszög területének összege

$$T(x) = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\frac{(4\sqrt{2}-x)^2}{x} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(2x+\frac{32}{x}\right) - 24,$$

ahol $0\le x\le 4\sqrt{2}$. Tudjuk, hogy ha $A>0$ és $B>0$, akkor $A+B\ge 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A=B$. Most $2x+\frac{32}{x}\ge 2\cdot\sqrt{2x\cdot\frac{32}{x}} = 16$ és $2x=\frac{32}{x}$, ha $x=4$.

Így $T \ge \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot 16 - 24 = 24(\sqrt{2}-1)$. A legkisebb területösszeg $T_{\min} = 24(\sqrt{2}-1)$ területegység, és akkor a P pont $x=4$ $(0<4<4\sqrt{2})$ távolságra van az e egyenestől.

Rábai Imre

2000. február

1. Az első egyenlet $(x-y)(x+y-2)=0$ alakban is írható. Ha $x=y$, akkor $2x^2=10x$, így a megoldások $x_1=0$, $y_1=0$ és $x_2=5$, $y_2=5$.

Ha $x+y=2$, akkor $x^2+(2-x)^2=10$, a megoldások $x_3=3$, $y_3=-1$ és $x_4=-1$, $y_4=3$.

2. Ha az első elem a, a hányados q, akkor

$$a\cdot aq^4=12^2 \quad \text{és} \quad aq-aq^3=18,$$

azaz $(aq^2)^2=12^2$, tehát a harmadik elem $a_3=12$ vagy $a_3=-12$, így

$$\frac{12}{q}-12q=18 \qquad \text{vagy} 2q^2+3q-2=0 \qquad \text{vagy} \qquad \frac{-12}{q}+12q=18; 2q^2-3q-2=0.$$

A megoldások: Ha $q=\frac{1}{2}$, akkor $a=48$, ha $q=-2$, akkor $a=3$, ha $q=2$, akkor $a=-3$ és ha $q=-\frac{1}{2}$, akkor $a=-48$.

3. Az y tengelyt az origóban érintő körök egyenlete $(x-u)^2+y^2=u^2$. Ezen körök közül azok érintik az $y=1-x$ egyenletű egyenest, amelyekre a két vonal egyenlete által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott (x-re vagy y-ra) másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$(x-u)^2+(1-x)^2=u^2, \qquad 2x^2-2(1+u)x+1=0,$$

$D=4(u+1)^2-8$. $D=0$ pontosan akkor, ha $u=-1+\sqrt{2}$ vagy $u=-1-\sqrt{2}$. A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete:

$$x^2+y^2+(2-2\sqrt{2})x=0 \qquad \text{vagy} \qquad x^2+y^2+(2+2\sqrt{2})x=0.$$

(A feladat sokféleképpen oldható meg. Keressen más módszereket is.)

4. Az egyenlet gyökei akkor valós számok, ha az egyenlet D diszkriminánsa nem negatív, azaz ha

$$(2-2m)^2-4\cdot 2\cdot(m^2-4m+1)\geq 0, \quad \text{azaz ha} \quad 3-2\sqrt{2}\leq m\leq 3+2\sqrt{2}.$$

Most $x_1x_2=\frac{m^2-4m+1}{2}\equiv\frac{1}{2}(m-2)^2-\frac{3}{2}$, így az m-re vonatkozó feltételből $(m-2)$-re

$$1-2\sqrt{2}\leq m-2\leq 1+2\sqrt{2}, \quad \text{tehát} \quad 0\leq(m-2)^2\leq(1+2\sqrt{2})^2.$$

Így

$$-\frac{3}{2}\leq\frac{1}{2}(m-2)^2-\frac{3}{2}=x_1x_2\leq\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})^2-\frac{3}{2}=3+2\sqrt{2}.$$

x_1x_2 legkisebb értéke tehát $-\frac{3}{2}$ (ha $m=2$), legnagyobb értéke $3+2\sqrt{2}$, ha $m=3+2\sqrt{2}$.

5. Ha $x > 0$, $y > 0$ és $x+y = 4$, akkor az $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ azonos egyenlőtlenség alkalmazásával $4 \geq 2\sqrt{xy}$, tehát $xy \leq 4$, $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{4}$ és így

$$\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{1}{y}\right) = 9+\frac{1}{xy}+3\cdot\frac{x+y}{xy} = 9+\frac{13}{xy} \geq 9+\frac{13}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y = 2$.

6. A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt az őt közbezáró két oldal arányában osztja, így az ismeretlen két oldal két részét jelölje x, illetve $2x$, a keresett szög γ. A két részháromszögben felírhatjuk a koszinusztételt.

$$x^2 = 12^2+8^2-2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos\frac{\gamma}{2}, 4x^2 = 24^2+8^2-2\cdot 8\cdot 24\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, $x = 4\sqrt{7}$. Így $\frac{\gamma}{2} = 60°$, $\gamma = 120°$; a harmadik oldal $3x = 12\sqrt{7}$ egység.
(A feladat más módokon is megoldható.)

7. Az *elemző* ábrán vegyük fel a P pontot az AB szakaszon belül és legyen $AP = x$, a négyzet oldalát jelölje a. (Az AB szakasz egyenesét tekintsünk olyan *számegyenesnek*, amelynek origója az A pont. Így a P pontnak az x valós szám felel meg.) Ezek szerint $PB = a - x$, $PD = \sqrt{17}$, $PC = 5$, $AD = BC = a$.

Az APD és a BPC derékszögű háromszögre alkalmazhatjuk Pitagorasz tételét. $a^2+x^2 = 17$, $a^2+(a-x)^2 = 25$, ahonnan $x = \frac{a^2-8}{2a}$, tehát $a^2+\left(\frac{a^2-8}{2a}\right)^2 = 17$.

$5a^4 - 84a^2 + 64 = 0$, $a^2 = 16$ vagy $a^2 = \frac{4}{5}$.

Így $a = 4$ és ekkor $x = 1$ vagy $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ és ekkor $x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Az első esetben a P pont az AB szakaszon belül van, a második esetben az A végpontú AB félegyenes kiegészítő félegyenesén.

8. Azonos átalakításokkal ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$) és rendezéssel az egyenlet

$$(2\sin x + \sin y)^2 + \cos^2 y = 0$$

alakban írható, így $\cos y = 0$ és $2\sin x + \sin y = 0$. $\cos y = 0$, ha $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.
Ha $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin y = 1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, így $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$;
ha $y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin y = -1$, $\sin x = \frac{1}{2}$, így $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
(Más módokon is megoldható a feladat.)

Rábai Imre