Gondolatok az egyenletek tanításáról II.

Írta: **dr. Majoros Mária**

A tanári pályám kezdetén az egyik tanítványomnak az exponenciális és logaritmikus egyenletek megoldását tanítottam. A gyerek nagyon nehezen indult a megoldásoknál. A lépéseket külön-külön értette, mégsem állt össze nála a kép mikor milyen összefüggést kell alkalmazni, lépésenként megakadt. A magyarázatra már minden lehetséges matematikai eszközt bevetettem, mégsem jutottunk előre.

Az egyik egyenlet megoldása közben megállt, és pontosan megfogalmazta a problémáját: Minden lépést ért, de azt egyáltalán nem látja, hogy egy adott esetben melyik összefüggésre hivatkozva csináljon átalakítást. Ekkor került sorra a következőhöz hasonló egyenlet:

$$\lg 2x + \lg(5x - 15) = 2$$

Amikor újra elakadt, akkor azt mondtam neki, hogy azért kell átalakításokat végezni, mert ez csak látszólag egy ismeretlenes egyenlet, ha jól belegondolunk, akkor itt igazából két ismeretlen van: az egyik a *lg2x*, a másik a *lg(5x – 15).* Az átalakításokra azért van szükség, mert csak akkor tudjuk az egyenletet megoldani, ha vissza tudjuk vezetni a megoldást egy ismeretlenes első vagy másodfokú egyenlet megoldására.

Egy kicsit szentségtörőnek éreztem magam, hogyan állíthatom egy jól láthatóan egy ismeretlenes egyenletről, hogy valójában két ismeretlent tartalmaz. A legnagyobb megdöbbenésemre a tanítványom ettől az akkor számomra lehetetlennek tűnő magyarázattól megértette, hogy miről van szó, és ettől kezdve kiválóan felismerte, milyen összefüggéseket kell alkalmazni. Később a matematikai megértésre vonatkozó olvasmányaim egyikében megtaláltam a magyarázatot arra, hogy miért pont ettől az értelmezéstől vált minden világossá a gyerek számára. Bármilyen algebrai kifejezés jelentése azoknak az elemi lépéseknek az összessége, amelyekkel azt létrehoztuk. Ebben az értelemben ez a kifejezés tényleg két ismeretlent tartalmaz.

Érdemes egy pillanatra elidőzni ennél a kérdésnél. Az „algebra” arab eredetű szó, és az egyenletek megoldása során alkalmazott egyik lépést jelenti. Ez a lépés nem más mint a tagok átvitele egyik oldalról a másikra. Hosszú ideig, egészen a XX. század elejéig algebrán egyenletek megoldását értették. Ez nagyon tág fogalomnak bizonyult. „Akkor jutottak közelebb a matematikusok az algebra lényegének a meghatározásához, amikor azt kezdték vizsgálni, hogy milyen matematikai *módszerek és eredmények* tekinthetők tisztán algebrai módszereknek és eredményeknek. Kiderült ekkor, hogy a tisztán algebrainak nevezhető módszerek és eredmények a matematika olyan tényein és eredményein alapulnak, amelyek a *négy alapművelet és az egyenlőségjel véges számú* alkalmazásával megfogalmazhatók.”

Ennek tudatában teljesen jogos volt a gyerek viselkedése az exponenciális és logaritmikus egyenletek megoldásánál. A két ismeretlenre vonatkozó magyarázat azt tette számára világossá, hogy itt az egyenletek megoldásában egy minőségileg új fejezetet nyitottunk.

Azóta az egyenletek tanításánál mindig kimondom, amikor nem algebrai egyenleteket tanítok. Az is megbeszéljük a gyerekekkel, hogy a megoldásban milyen plusz eszközöket kell igénybe vennünk, ha sikeresek szeretnénk lenni. Ezek a függvények tulajdonságai, a definíciók (pl. logaritmus), az ismert azonosságok és más összefüggések (pl. trigonometrikus

Pitagorasz tétel). Ezeknek az összefüggéseknek a segítségével első vagy másodfokú egyenlet megoldására vezetjük vissza az adott egyenletet.

Ebben is két esetet lehet megkülönböztetni. A logaritmus példájánál maradva:

1. lg2x + lg(5x – 15) = 2 egyenletet a
   $10x^2 - 30x - 100 = 0$ másodfokú egyenletre vezetjük vissza a logaritmus azonosságainak és definíciójának alkalmazása után.
2. A másik egyenlettípus a logaritmikus kifejezésben válik első vagy másodfokúvá.
   $\lg^2 x + \lg x^2 = -1$
   A megfelelő átalakítások után ez az egyenlet $(\lg x)^2 + 2\lg x + 1 = 0$ alakúvá válik, ahol a megoldás végén még alkalmaznunk kell a logaritmus definícióját.

A fentiek alapján a középiskolában tanított nem algebrai egyenleteket a megoldás során alkalmazott lépések szerint a következő két nagy csoportba sorolom.

1. típus

Ebbe a csoportba azokat az egyenletek tartoznak, amelyek új ismeretlen bevezetése után egy exponenciális, logaritmikus vagy egy gyökös kifejezésben válnak másodfokúvá.

$$2\sqrt[3]{x^2-4x+19} - 3\sqrt[6]{x^2-4x+19} = 2$$

A megoldás lépései:

- $\sqrt[6]{x^2-4x+19} = y$ bevezetése
- az $2y^2 - 3y - 2 = 0$ egyenletet megoldása
- a hatodik gyök definíciójának alkalmazása
- egy újabb másodfokú egyenlet megoldása
- a gyökök ellenőrzése

Sok esetben az új ismeretlen bevezetését megelőzi néhány olyan lépés, amikor azonos átalakításokat végzünk vagy definícióra hivatkozva alakítunk át.

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{x}} + 125\right) = 1 + \frac{1}{2x} + \log_5 6$$

A megoldás első lépései:

- a logaritmus definíciójának alkalmazása: $1 = \log_5 5$, $\frac{1}{2x} = \log_5 5^{\frac{1}{2x}}$
- a logaritmus azonosságainak alkalmazása
- a logaritmusfüggvény szigorú monotonitására történő hivatkozás
- $5^{\frac{1}{2x}}$-ben másodfokú egyenletet kapunk
- A másodfokú egyenlet megoldása
- A visszahelyettesítés után az exponenciális egyenlet megoldása

A megoldás szerkezete hasonló a következő feladatoknál is:

$$x + \lg\left(3^{2x} + 18\right) = \lg 11 + x \lg 30$$

$$\log_2(x+1) + \log_{x+1} 2 = \frac{5}{2}$$

$$\log_{3x} 3 + 4\log_{9x} 3 = 6$$

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 2 \leq 0$$

$$2^{x+\sqrt{x^2+1}} - 48 \cdot 2^{-x-\sqrt{x^2+1}} = 13$$

2. típus

Ebbe a csoportba azokat az egyenleteket sorolnám, melyek lebontása során függvénytulajdonságokból vagy definíciókból indulunk ki.

Ezek az egyenletekhez a legegyszerűbb esetben a következő általános alak rendelhető:

$$f(g(h(\ldots(x)))) = a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\left(x - \sqrt{x^2 - 3x - 12}\right)\right) = 0$$

$$\sin \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = 0$$

$$\sin \sqrt{\log_{\sqrt{2}} x} = 0$$

Egy másik lehetőség, hogy az $f(g(x)) = f(h(x))$ általános alakban megadható összefüggésből indulunk ki:

$$\lg \sin 2x = \lg tgx$$

Ugyancsak ide tartoznak a

sinx + cosx = 2

típusú egyenletek.

Az előző tanulmányban a mérlegelv túl korai bevezetésének fölöslegességéről írtam. Ezt most két gondolattal egészíteném ki. Az egyik gondolat arra vonatkozik, hogy kicsit kisebb hangsúlyt kellene adni ennek a módszernek, hiszen a megtanulása után szinte azonnal találkoznak a gyerekek a módszer korlátaival a nem ekvivalens átalakítások alkalmával.

A másik gondolat, ami felvetődött bennem, ha matematikát és nem feladatmegoldások során alkalmazott mechanikus eljárások tömkelegét tanítjuk, akkor észrevehetjük, hogy az első nem algebrai egyenlet megoldásával már nagyon korán találkoznak a gyerekek. Amikor 5. osztályban meg kell válaszolniuk azt a kérdést, hogy |x – 2| = 3, akkor az abszolút érték definíciójára támaszkodva tudnak eljutni a megoldáshoz. Ennek bonyolultabb formájával később folyamatosan találkoznak a gyerekek.

$$|x-3| + |x+1| = 6$$

Egy ilyen abszolút értékes egyenlet megoldási lépéseit is könnyebben tudjuk magyarázni, ha hivatkozunk arra, hogy ez az egyenlet a négy alapművelet segítségével közvetlenül nem bontható le.

Szintén a nem algebrai egyenletek körébe sorolom a következő, a legnagyobb közös osztó vagy legkisebb közös többszörös definíciójára visszavezethető egyenleteket.

$(x ; 96) = 24$

$(x;2^5 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3$

$[72 ; x] = 792$

$[2^3 \cdot 3^2; x] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

Sokakban felvetődhet a kérdés, hogy nem lehet átlagos esetben a matematika ilyen mélységeit érinteni. Ennek az elképzelésnek a gyakorlat ellentmond. Tapasztalatom szerint a tiszta matematikai magyarázatok, a világos struktúra kimondva – vagy kisebb korban kimondatlanul is – mindig a jobb megértést segítették elő, melynek hatására a gyengébb tanulók matematikai gondolkodása is jelentősen fejlődött.

Irodalomjegyzék:

Majoros Mária: Oktassunk vagy buktassunk?- Calibra Kiadó, Budapest,1992.
Szele Tibor: Bevezetés az algebrába – Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.