

A mérés II.**A szemléltetés**

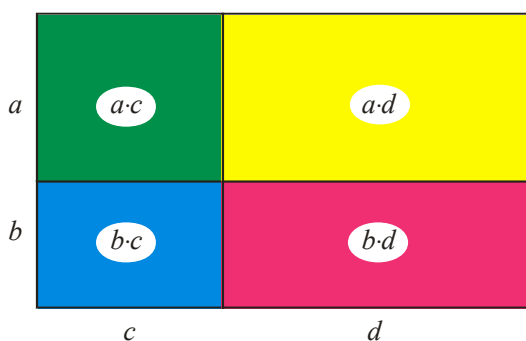
Írta: dr. Majoros Mária

Az absztrakció centrális matematikai képesség. Amikor szemléltetünk, és a szemléletből vezetünk le fogalmakat, akkor is a gyerekek absztrakciós készségére támaszkodunk. A gyerekeknek el kell vonatkoztatniuk az ábra minden egyedi tulajdonságától, és csak arra a közös tulajdonságra kell koncentrálni, amely az adott fogalomhoz elvezet. Tehát gyakorlatilag fel kell ismerniük azt az invariáns elemet, ami minden szemléletes megjelenésben közös. Ezért nagyon fontos, hogy egy-egy fogalom sokféle szemléletes megjelenéshez kötődjön, mert ekkor a különböző szemléletes megjelenítések elősegítik, hogy a lényegtelen elemek teljesen kizáródjanak az értelmezésből.

Nemrégem a nevezetes azonosságokat tanítottam nyolcadik évfolyamon. Túl korainak tartom a nevezetes azonosságok bevezetését 13-14 éves korban, mert a gyerekek többségének a gondolkodása nem elég érett ennek az ismeretnek a feldolgozásához, ezért jó együttműködés esetén erősen frusztrálódnak attól a tényről, hogy szembesülniük kell azzal, hogy valamit nem képesek jól megérteni, és gyengén vagy közepesen alkalmazzák az ismereteiket.

Mindössze négy összefüggést tanítunk a gyerekeknek: $(a \pm b)^2$; $(a + b)(a - b)$; $(a + b)(c + d)$.

Miután körülbelül két hetet szánunk négy egyszerű „képlet” megtanítására, nyilvánvaló, hogy azért foglalkozunk vele ilyen sokáig, mert az ismeretekkel együtt valami alapvető matematikai készséget is fejlesztünk. Ezeket az összefüggéseket téglalapok területének a kiszámításával szemléltetjük. A közös, ami az általános összefüggéshez elvezet, hogy a téglalap alakjától és az oldalak hosszát megadó kifejezések algebrai megjelenésétől függetlenül igaz, hogy a téglalap területe megadható kétféle eljárással: összeszorozzuk az oldalait, illetve a részterületek összegét vesszük, és ez a két mennyiség egyenlő.



1. ábra

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

A szemléltetéstől azt várjuk, hogy a gyerekek először a szemlélethez kötődően értelmezzék a feladatokat, majd attól fokozatosan elszakadva a tisztán algebrai megjelenés alapján is képesek legyenek helyes átalakításokra.

Hasonló folyamatok történnek akkor is, amikor például az előjeles számok közötti művelet végzést tanítjuk például a számegyenesen vagy más modellel történő szemléltetés segítségével. A gyerekek hosszú ideig használják az eszközt a műveletek tartalmának helyes értelmezéséhez, majd amikor elszakadnak a szemléltetéstől, minden olyan esetben újra előhívják az ezzel kapcsolatos emlékeiket, amikor bizonytalannak érzik magukat.

Természetesen bármit is csinálunk, bárhogyan is szemléltetünk, mindig számolnunk kell azzal, hogy a tanítás során esetleg nem olyan eredményt érünk el, mint amit korábban elképzeltünk. Én sok évi tanítás után egyre inkább úgy képzelem el, hogy a következő folyamattal állok szemben:

<p>Az átadni kívánt tudás, ismeretek és készségek: Szemléltetések, ábrák, grafikonok. Készségek és képességek. A matematika összefüggései, szimbólumok és jelölések.</p>	<p>Szűrő: <i>A megelőző tapasztalatok és tudás. Az ehhez kapcsolódó készségek.</i></p>	<p>A megjelenő tudás és készségek, ami gyakran gyengén, esetenként nagyon erősen eltérhet attól, amit várunk.</p>
---	---	--

Volt idő, amikor nagyon szenvedtem a saját esetleges „eredménytelenségemtől”. Később rájöttem arra, hogy akkor tudom a tanítás folyamatát kezelni, ha a sikertelenséget nem kudarcnak tekintem, hanem megpróbálom megérteni, mi okozza az eltéréseket, amelyek a gyerekek tudásában megjelentek – ahhoz képest, amit tanítani szerettem volna. Így a megoldáson lehetett gondolkodni: hogyan tudom ezeket a szinte törvényszerűen bekövetkező jelenségeket kiküszöbölni.

Mindig nagyon örülök, ha olyan emberrel találkozom, aki hasonló problémákon gondolkodik, és megerősítve érzem magam, amikor hozzám hasonló következtetésre jut. Ezért örültem, amikor elolvastam Dienes Zoltán gondolatait, aki megfogalmazta, hogy a tanulás terén az egyes gyerekek között nemcsak fokozati, hanem minőségi különbségek is vannak. Dienes azt állítja, hogy a különböző matematikai fogalmakhoz az egyes gyerekek lényegesen eltérő módon juthatnak hozzá. Ezt magam is tapasztalom minden olyan esetben, amikor többféle szemléltetést alkalmazok: a gyerekek egy része az egyiket részesíti előnyben, míg mások ugyanazt a matematikai tartalmat jobban tudják kötni valami más szemléletes megjelenítéshez. Dienes szerint ezért nincs értelme a képességek szerinti bontásnak. Azt is megfogalmazta, hogy a tanár nehézsége elsősorban abból fakad, hogy az absztrakt fogalmak kialakításának lehetséges módjait nem ismerjük. Nem igazán tudjuk megmondani, hogy például a korábban említett előjeles számok közötti műveletek bevezetésénél miért fogja a gyerekek egy része a számegyenessel történő szemléltetést érteni, és miért lesz mások számára sokkal jobban használható modell az adóssággal történő magyarázat vagy a korongmodell stb.

Ha megpróbáljuk megérteni a szemléltetés és a kialakítandó matematikai fogalom kapcsolatát, akkor talán közelebb jutunk az absztrakció létrejöttének megértéséhez. Ilyen szempontból a lehetséges szemléltetéseket alapvetően két nagy csoportba sorolnám:

1. Vannak olyan szemléltetések, amelyeknek a lényege az, hogy egy cselekvéshez kötött helyzetben mutassák be a matematikai fogalmat vagy műveletet. Ezekben az esetekben a cselekvés és a matematikai fogalom között egy megfeleltetést hozunk létre. A fogalom használatát és a vele kapcsolatos műveletek szabályait valamilyen cselekvéshez kötjük. Ezeket a szabályokat ugyanúgy meg kell a gyerekeknek tanulni, mint például egy társasjáték szabályait. Az ilyen cselekvéshez kötött szemléltetéstől azt várjuk, hogy a gyerekek egy idő után elvonatkoztatnak a cselekvés egyedi körülményeitől, és az általános matematikai tulajdonságokat kivonják, és így létrejön az absztrakt fogalom.

Tipikus példa erre a negatív számok tanításának egy kisautó mozgására átfogalmazott modellje: A kisautó nézhet a ház felé, ekkor beszélünk pozitív számról, és nézhet a fa felé, ekkor a szám előjele negatív. Ugyanakkor a kisautó haladhat előre, ezt az összeadás műveletének feleltetjük meg, míg tolathat, amit a kivonás műveletének feleltetünk meg.

Az ilyen típusú szemléltetést én **konkretizálásnak** hívom. Ha jobban megvizsgáljuk ezt a példát, akkor az egész számok halmazán értelmezhető kivonás és összeadás fogalmát redukálja az előjelszabályra, tehát a műveletek írásbeli elvégzésének szabályára. Természetesen sok megértési problémával küzdő gyerekek átmeneti segítséget nyújthat az ilyen típusú cselekvéshez kötött szemléltetés. Nem szabad azonban szem előtt téveszteni, hogy az ehhez hasonló szemléletes modellek nem felelnek meg az emberi ismeretszerzés folyamatának, a tapasztalat-képzet-fogalom törvényének. A modellben szerzett tapasztalatok ugyanis nem segítik a fogalom megalkotását, hanem csak illusztrálják azt. Ebből adódóan a funkciójuk nem a művelet lényeges tulajdonságainak képszerű kiemelése a fogalom megalkotásához, hanem az írásbeli szabályok memorizálását segítő cselekvések többszöri ismétléssel történő rögzítése.

Természetesen, ha egy-egy fogalom tanítása kapcsán több ilyen szintű illusztráció jelenik meg a matematikaórán, akkor az ilyen típusú modellek is segíteni tudnak abban, hogy a gyerekek közelebb tudjanak kerülni a fogalom általános tartalmához.

2. Felvetődik a kérdés, elképzelhető-e olyan szemléletes helyzet, amikor egy-egy matematikai fogalom lényegét tudjuk megragadni, és a fogalom élményét nyújtó tapasztalathoz juttatjuk a gyerekeket.

Számos esetben találkozhatunk ilyen szemléltetéssel is. Nézzünk néhány példát:

- a. A 70-es évek végén az általános iskolai tantervbe bekerült a 10-es számrendszer mint helyi értékes jelölés és az ebben a jelölésrendszerben kialakult műveletvégzési algoritmus fogalmának általánosítása. Ezért a gyerekeknek különböző alapú számrendszereket tanítottunk, és műveleteket végeztünk ezekben a számrendszerekben. Az ehhez alkalmazott szemléltető eszköz a Dienes-készlet volt. Ez a szemléltetés valóban képes volt a tanítandó absztrakt fogalom élményszerű megjelenítésére. A gyerekek mégsem tudták elsajátítani mindazt, amit szeretnénk volna nekik tanítani.

Aki annak idején megpróbálkozott ennek tanításával, frusztrációként élhette meg, hogy nagyon kevés gyerek esetében érezhette sikeresnek magát. Nem a

szemléltetéssel volt baj, hanem azzal, hogy 10 éves gyerekeknél próbáltuk meg elérni, hogy kialakuljon az algoritmus általános fogalma. Sok jó ügyet lehet elrontani azzal, hogy nem gondoljuk végig, az adott korosztály általános értelmi szintjét tekintve képes-e egy ismeret befogadására. Úgy gondolom, hogy ötödikes gyerekek értelmi fejlődése nincs olyan szinten, hogy ezt a nagyon absztrakt ismeretet képesek legyenek feldolgozni.

- b. Ma Magyarországon Pósa Lajos nevéhez kötném azokat a szemléltetési kísérleteket, amelyek célja, hogy a matematikai fogalmakhoz kapcsolódó szemléletes vagy cselekvéses élményhez juttassák a gyerekeket.

Tőle származik például a teljes indukció szemléltetésére a következő feladat:

A rendőrség egy ékszerrablás után elfogott nyolc embert, akik a következőképpen vallottak:

Bende Kázmér: „Lajos ártatlan.”

Cinege Rozál: „Annamária ártatlan.”

Gyurma György: „Benedek ártatlan.”

Vörös Valéria: „Rozál ártatlan.”

Talpas Benedek: „Tihamér ártatlan.”

Kiss Annamária: „Gyuri ártatlan.”

Halló Lajos: „Vali ártatlan.”

Tóth Tihamér: „Ártatlan vagyok.”

Tudjuk, hogy a három elkövető a gyanúsítottak között van. Az ártatlanok igazat mondanak. Ki a tettes?

Az ilyen típusú szemléletes példákat nagyon nehéz egy az egyben lefordítani a megfelelő matematikai összefüggésre, jelen esetben a teljes indukcióra. Nincs is igazán értelme, mert a lefordítás körülbelül azzal lenne egyenlő, mintha például egy Monet kép szavakban történő leírásától azt várnánk, hogy ugyanazt az esztétikai élményt nyújtja, mint a kép megtekintése.

A szemléltetés kapcsán érdemes egy pillanatra ismét kitekinteni a tanulás – ezen belül a nyelvtanulás – általános folyamatára, és az ezzel kapcsolatos elméletekre. A XX. század második felében egy lengyel származású amerikai nyelvész, Noam Chomsky nevéhez fűződik a hagyományos nyelvelmélet forradalmian új alapokra történő helyezése, és a generatív grammatika (matematikai nyelvészet) megalapozása. Chomsky-ról érdemes tudni, hogy az egyetemen matematikát tanult, majd egy híres nyelvész laboratóriumába került, ahol a doktori értekezését írta. Így került kapcsolatba a nyelvtudománnyal.

Chomsky elmélete szerint az ember úgy tanul meg beszélni, hogy hallja a nyelv érvényes mondatait, és ezek egymásra vonatkoztatásából kivonja a szabályokat. „Ahogyan a nyelvész, ugyanúgy a nyelvet tanuló gyerek számára is az a kérdés, hogyan alkossa meg a nyelvi jelenségekből az azokat létrehozó mögöttes szabályrendszert...” („The problem for the linguist, as well as for the child learning the language, is to determine from the data of performance the underlying system of rules....”)

Meggyőződésem, hogy az anyanyelv és a matematika tanulása során alkalmazott absztrakciós folyamatok nagyon hasonlóak. A szemléltetésből és a matematikai példákból a gyerekek

ideális esetben ugyanúgy ki kell vonnia azt a szabályrendszert, ami azokat létrehozta. Ha a matematikából akarunk hasonlatot venni, akkor azt mondhatjuk, hogy gondolatban, a nyelvtanulás során halmazok metszetét képezzük, és a metszetek adnak egy-egy nyelvi elemet, akár konkrét szóról van szó, de az általános nyelvi szabályokra ugyanez érvényes. Lásd: [Bloomfield definíciói](#)

Ebből levonhatjuk a következtetést, hogy mindenki képes az absztrakcióra, aki képes volt legalább az anyanyelv helyes elsajátítására. (Ugyanakkor ismét hivatkoznunk kell a korábban más említett Shipman és Hess eredményeire, miszerint a szociokulturális háttér jelentősen befolyásolja az absztrakciós készség fejlettségét, illetve a differenciált nyelvhasználatot, ami alapvetően kihat a matematika eredményes tanulására.) Az októberi cikkben már szó volt arról, hogy az anyanyelv elsajátítása során is folyamatosan megfigyelhetők a szubjektív torzítások. A másokkal történő kommunikáció segít abban, hogy az egyén és az adott nyelvet beszélő csoport között ne legyenek a kölcsönös megértést akadályozó jelentős eltérések.

Amikor többféle szemléletes modellt alkalmazunk, akkor két dolgot segítünk. Egyrészt lehetőséget próbálunk teremteni arra, hogy minden gyerek megtalálja azt a modellt, amiben ő a legtermészetesebben tud tájékozódni. Másrészt a helyes absztrakciót próbáljuk segíteni, tehát csak a fogalomhoz tartozó lényeges tulajdonságok kerüljenek be a fogalomba. Így kicsi legyen a szubjektív torzítás lehetősége.

Irodalomjegyzék:

Noam Chomsky: Aspects of the Theory of Syntax, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts 1965.

Leonard Bloomfield: Posztulátumok a nyelv tudománya számára – Szöveggyűjtemény az általános nyelvészet tanulmányozásához, szerkesztette: Dr. Telegdi Zsigmond, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

Hajdú Sándor: Matematika 5.

Bergengóc Példatár: Typotex, 1999,

http://www.typotex.hu/book/m_0048.htm, http://www.typotex.hu/book/m_0063.htm

R.Hess-V.C.Shipman: A kisgyerekkori tapasztalás és a kognitív eljárások szocializálódása, KJK, Budapest, 1974.

