Az azonosságok tanításáról II.

A négyzetgyök és a számfogalom felépítése

Dr. Majoros Mária

Minden középiskolás matematika tankönyvben egy önálló fejezetcím a négyzetgyök. Nézzünk meg, hogyan vezeti be a középiskolás tankönyvek többsége a négyzetgyök fogalmát:

„Minden valós szám négyzete nemnegatív szám, így kereshetjük, hogy egy nemnegatív szám minek a négyzete. Szeretnénk egyértelmű választ adni, ezért bevezetjük a négyzetgyök fogalmát." És ezután azonnal következik a gyök szabatos vastagon kiemelt definíciója, majd rögtön a gyökvonás azonosságai. Az azonosságok után bebizonyítjuk, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

Ha a megértés szempontjából nézzük ezt a felépítést, akkor több ponton is kifogásolható:

1. Rögtön az elején, valós számról beszél, pedig a gyerekek még csak a racionális számokat ismerik. Persze, ha onnan indulna, hogy minden racionális szám négyzete egy nemnegatív racionális szám, akkor a gyerekek joggal tennék fel a kérdést, hogy micsoda butaság a gyökjel bevezetése.
2. Aki először találkozik a gyök fogalmával, hiányolja azt a gondolati láncszemet, mi van azokkal a számokkal (például ilyen a 2, 3, 5,….), amelyek nem egy racionális szám négyzetei. Az ilyen esetekben megjelölünk-e valamit a gyökkel, vagy egy értelmezhetetlen jelet használunk.
3. A felépítés ezt a logikai hézagot azzal tölti ki, hogy a végén bebizonyítja, $\sqrt{2}$ nem racionális.
4. Természetesen matematikailag nincs logikai hézag, hiszen a gyök definíciója egy egzisztencia állítás: „Valamely nemnegatív *„a"* szám négyzetgyöke olyan nemnegatív szám, aminek a négyzete az *„a"* szám." A definíció azt állítja, hogy minden nemnegatív szám gyökéhez egyértelműen hozzárendelhető egy szám.

És itt el is jutottunk a leglényegesebb kérdéshez: ***a gyök egy jelölés***, amit azért kell bevezetnünk, mert bizonyos mennyiségeket nem tudunk az addig ismert számírás segítségével megadni. Tehát a helyi értékes jelölés, a tört, a hatványalak után a gyerekek számára a négyzetgyök lesz a mennyiségek szimbolikus írásbeli megjelenítésének negyedik formája.

Ha egy új jelölést bevezetünk, akkor meg kell mutatni azt, hogy mi tette szükségessé az új szimbólum megjelenését. Tehát meg kell mutatnunk azt a mennyiséget, amit nem tudunk a már ismert szimbólumokkal megadni.

Ennek a mennyiségnek a létezését az ókori görögök fedezték fel. Érdemes megmutatni a gyerekeknek, hogyan történt mindez.

A görögök kétféle számot ismertek: az egész számokat és az arányszámokat. A püthagoreusok számelmélete szerint az ***egy*** a számok eredete, ami nem bontható kisebb részekre – tehát nem osztható, csak szorozható – így a törtekkel két egész szám arányaként értelmezték. Ők fedezték fel a számtani és mértani középarányos fogalmát, és a szerkesztést is megoldották.

A mértani középarányos vizsgálata és szerkesztése elvezette őket ahhoz a felismeréshez, hogy miközben a mértani középarányost mindig meg tudták szerkeszteni, tehát bármely mérhető oldalú téglalaphoz találtak olyan négyzetet, amelynek területe egyenlő volt a téglalap területével, és ennek a négyzetnek minden esetben láthatóan létezett az oldala, bizonyos esetekben – ahogyan ők fogalmaztak – az oldal hosszúsága „nem volt szám". Ezzel azt akarták kifejezni, hogy nem létezett ezeknek a mennyiségeknek a jelölésére alkalmas szám. Ezért kapták ezek a mennyiségek az „arrhéton", magyarul „kimondhatatlan" nevet.

A négyzet területének kettőzése ugyanerre a problémára vezetett. Ha egy négyzet oldalát meg tudjuk mérni, akkor nem tudunk számot rendelni a kétszeres területű négyzet oldalához. Ennek részletes magyarázata megtalálható „Összemérhetetlen" címen mellékelt írásunkban.

Ha a kis négyzet oldalát egynek tekintjük, akkor területének mérőszáma is egy. A megkettőzéssel kapott négyzet területe értelemszerűen 2. Oldala pedig egy olyan szám, aminek a négyzete 2.

A területkettőzés tehát elvezetett egy olyan szám kereséséhez, aminek a négyzete 2. Érdemes időt szánni arra, hogy megpróbáljuk tizedes törtek segítségével megkeresni azt a számot, aminek a négyzete 2. Legyen ez a szám α.

$$
\begin{aligned}
1{,}4 &< \alpha < 1{,}5\\
1{,}41 &< \alpha < 1{,}42\\
1{,}414 &< \alpha < 1{,}415\\
1{,}4142 &< \alpha < 1{,}4143\\
1{,}41421 &< \alpha < 1{,}41422\\
1{,}414213 &< \alpha < 1{,}414214\\
1{,}4142135 &< \alpha < 1{,}4142136\\
1{,}41421356 &< \alpha < 1{,}41421357\\
1{,}414213562 &< \alpha < 1{,}414213563
\end{aligned}
$$

A kilencedik tizedes jegyig nem keletkezett szakasz. Korábban már többször megmutattuk, hogy a közönséges törtek tizedes tört alakban felírva véges vagy végtelen tizedes törtként írhatók fel. Most újra visszatérhetünk annak megbeszélésére, miért van ez szükségképpen így.

A tizedes törtek olyan speciális törtek, melyek nevezője 10 hatványa. 10 bármely hatványának prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 szerepel. Tehát azok a törtek, amelyek nevezőjének prímtényezős felbontásában nincs más prímtényező, bővítéssel 10 hatványává alakíthatók, és így véges tizedes törtet kapunk. Azok a törtek, amelyek nevezőjének prímtényezős felbontásában más prímszám is előfordul, nem bővíthetők 10 hatványává.

Bármilyen nagy n egész szám állhat egy tört nevezőjében, annak csak (n-1)-féle 0-tól különböző maradéka van, tehát a tizedes törtté történő átírás során legfeljebb (n-1) hosszúságú szakasz keletkezik.

A közelítő értékek keresése során úgy tűnik, hogy a keresett α szám esetleg nem sorolható be az eddig ismert számaink közé, mert lehetséges, hogy végtelen és nem szakaszos tizedes törtet ad. Miután ezt a sejtésünket megfogalmaztuk, bizonyíthatjuk α irracionalitását. Ezzel példát mutattunk arra, hogy az eddig ismert számírási szimbólumok alkalmatlanok annak a mennyiségnek a jelölésére, aminek a négyzete 2.

Az azonosságok tanításáról II.

Amikor néhány nappal ezelőtt 8. osztályban ezt tanítottam, a gyerekek maguk fogalmazták meg a feladatot, hogy kellene találni egy új jelet, mert **a rendelkezésre álló ismert számírási jelölések alkalmatlanok bizonyos mennyiségek leírására.**

Ekkor a gondolkodás és az emberi ismeretek felépülése szempontjából a helyére tettük a dolgokat. Nem a gyök teremtette meg az irracionális számokat, hanem az irracionális számok felfedezése teremtett meg egy jelölést, nevezetesen a $\sqrt{\ }$ -öt. Tisztázhatjuk a gyerekekkel, hogy hasonlóan bármely szimbólumhoz, a jel önmagában értelmetlen. A definícióval adunk értelmet a jelnek, és ennek a közös megegyezésnek megfelelően kell azt használnunk.

Ebben a felépítésben a gyerekek számára természetes, hogy a törtekhez hasonlóan itt is meg kell oldanunk néhány feladatot:

1. Az új jelet be kell illesztenünk a már ismert jelöléseink közé. Meg kell mutatnunk, hogy az egész számokat és a törteket, hogyan tudjuk az új szimbólum segítségével megadni (a szakirodalom úgy fogalmaz, hogy „$\sqrt{\ }$ -ös alakban megadni”). Itt hivatkozhatunk arra, hogy ez a feladat csak formájában új, tartalmát tekintve a gyerekek korábban is találkoztak ezzel a problémával akkor, amikor az egész számokat tört alakban felírták.
2. Értelmeznünk kell az új szimbólumra a műveletvégzés szabályait , tehát meg kell alkotnunk a $\sqrt{\ }$ azonosságait, ami nem más, mint a gyökös alakban megadott számokra vonatkozó számolási szabályok.
3. Meg kell tanulnunk az új szimbólum segítségével felírt mennyiségek rendezését.

A gyökkel kapcsolatos matematikai szóhasználat nem támogatja a megértést. Néhány olyan kifejezést emelnék ki, amelyik kifejezetten zavaró lehet a szimbólum használatával először találkozó gyerekek számára:

1. *„Vigyük be a gyökjel alá!”* Ez a felszólítás a következő átalakítást takarhatja például: $3 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}$
   Az ilyen feladatokban sokkal szerencsésebb lenne azt mondani, hogy a szorzat másik tényezőjét is a gyökös jelölés segítségével adjuk meg, ezután alkalmazunk egy a gyökre, mint szimbólumra vonatkozó műveletvégzési szabályt.
2. Ugyanilyen, a tartalmi lényeget elfedő szóhasználat az előző feladat megfordítása, amikor *„kiviszünk a gyökjel alól.”*
3. Alapvetően sérti a megértést a következő megfogalmazás: *„A gyök kiszámítása nélkül adjuk meg a kifejezés pontos értékét!”* Például ilyen feladat: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{225} = 15$

   Ezzel a szóhasználattal több probléma is van. Először is a gyököt úgy értelmezi, mint számolási eljárást. Ezzel tulajdonképpen zavart kelt abban az értelemben, hogy teljesen elnyomja a gyök elsődleges jelentését: ez egy számírási szimbólum. Ha hasonlattal akarnék élni, ez a szóhasználat annak felelne meg, mintha a törteket azonosítanánk azzal az osztással, amelyet műveletként hozzá tudunk rendelni. Másodszor ez a szóhasználat megerősíti a gyerekekben azt az amúgy is nagyon erős képzetet, hogy csak a 10-es számrendszerben megadott számokat tekintik számnak.

   Az ismeretek felépülése szempontjából az ilyen „homályos” megfogalmazások azzal a következménnyel járnak, hogy a gyerekek a megoldott feladatok alapján a lényeges tulajdonságok kiemelésével kénytelenek megalkotni a fogalmaikat. Miután ez igen magas szintű matematikai absztrakciós készséget igényel, így csak néhány gyerek képes a fogalom helyes megértésére. A többiek gyakorlatilag utánzással tanulnak. Ezért a gyerekek többsége estén azt tapasztaljuk, hogy miközben az azonosságokat tudják, a konkrét feladatok megoldásában történt alkalmazás során bizonytalanok.

Már említettem, hogy egy általam tanított 8. osztályban most került sor a számfogalom bővítésére. A gyerekek könnyen és jól megértették az irracionális szám felfedezését. A $\sqrt{}$, mit szimbólum bevezetése után gyorsan megtanulták az új jelölésre vonatkozó számolási szabályokat. Természetesnek tekintették – ahogyan a törtek esetében, úgy a $\sqrt{}$ esetében is – az új jelölést be kell illesztenünk a már meglévő számírási szimbólumaink közé. Az itt ismertetett felépítésben ez szinte senki számára nem okozott nehézséget, pedig ebben az osztályban sem minden gyerek tanulja könnyen a matematikát.

A különböző fogalmak kialakulása a matematika története során és ugyanezeknek a fogalmaknak a tanulás során megfigyelhető felépülése gyakran nem esik egybe. A négyzetgyök estében azonban a fogalom történeti létrejötte és elsődleges alkalmazása egybeesik azzal a fentebb vázolt tanítási folyamattal, amely – megítélésem szerint – a leghatékonyabban támogatja a megértést.

Miután a gyerekek világosan megértették a gyök, mint szimbolikus jelölés lényegét, és jól tudják azt használni, sor kerülhet a gyökhöz kapcsolódó más matematikai fogalmak bevezetésére, gyökfüggvény, gyökös egyenletek, stb.

Irodalomjegyzék:

Sain Márton: Nincs királyi út! – Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
Kosztolányi-Kovács-Pintér-Vincze: Matematika 10. – Mozaik Kiadó, Szeged
Hajnal-Számadó-Békéssy: Matematika 9. – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
Earliest Uses of Symbols of Operation –
http://members.aol.com/jeff570/operation.html