Algoritmusok

Előzmények

A kőszegi matematika tanártovábbképzésen a tavalyi évhez hasonlóan idén is a 7. osztályt végzett diákokkal dolgozhattam együtt. A diákok ügyesek és lelkesek voltak, szakmailag nagyon szép, eredményes munkát végeztek.

Az alábbiakban az órai feladatokat és elhangzott megoldásaikat ismertetem. A diákok nagyfokú érdeklődésére jellemző, hogy a kitűzött problémákra általában több megoldást is találtak; ezek közül a lényegesen különbözőket és az érdekesebbeket igyekeztem mind megemlíteni.

Mivel ebben a cikkben az órák tényleges szakmai menetét követhetjük végig, célszerűnek tűnt a kitűzési sorrend helyett a megbeszélés szerinti sorrendben tárgyalni a feladatokat. Az órán elhangzott elméleti megfontolások és az egyes feladatok közötti kapcsolatok, a feladatmegoldások összefüggései és háttere a megjegyzésekben találhatók. Ugyanitt javaslok néhány érdekes, az aktuális témához kapcsolódó feladatot is.

Végezetül néhány könyv, ahonnan a problémák döntő része származik:

Hajnal Péter: Elemi kombinatorika feladatok, POLYGON, 1997.
Orosz Gyula – Majoros Mária: Tehetséggondozás matematikából, Tóth K. Kft.
Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, TYPOTEX, 2000.

1. foglalkozás

1. feladat:
Ez egy bűvészmutatvány. 27 kártyalapból egyet kihúzatunk a diákokkal úgy, hogy mi nem látjuk a kiválasztott lapot. Ezután a kártyákat egyesével három 9-lapos kupacra osztjuk, s megkérdezzük, hogy melyik csoportban van a kiválasztott lap. Miután ezt megmondták a diákok, összegyűjtjük a lapokat, s még kétszer elvégezzük ugyanezt az eljárást. Végezetül néhány bűvészkelléket felhasználva (kártyalapok megfújása, varázsigék mormolása) átlapozzuk a paklit, s egyszerűen megmondjuk, melyik volt a kiválasztott lap.
Mi a mutatvány magyarázata?

Megoldás:
Mindháromszor úgy gyűjtjük össze a lapokat, hogy mindig középre kerüljön az a kupac, amelyben éppen benne van a kiválasztott lap. Ekkor tudjuk, hogy az első összegyűjtés után a 27 lapból a középső 9 valamelyike a keresett kártya. A második szétrakás és összegyűjtés után a középső három lap valamelyike, végül a pakli közepe, tehát a 14. lesz a kiválasztott kártya.

2. feladat:
Egy sorozatot első tagja 1, s minden további tagot úgy képezünk, hogy az előző tag kétszeresét hárommal megnöveljük. A sorozat első 100 tagja között hány 13-mal osztható van?

Megoldás:

A sorozat tényleges tagjai helyett elég a tagok 13-as osztási maradékait vizsgálni. Az első néhány tag maradéka: 1, 5, 0, 3, 9, 8, 6, 2, 7, 4, 11, 12, 1, 5 stb.

Észrevehetjük, hogy a 13. tagtól kezdve ismétlődés lép fel. Az ismétlődésnek az az oka, hogy csak 13-féle maradék lehet, tehát előbb-utóbb biztosan találunk egyező maradékokat.

A másik észrevétel, hogy mivel bármely tag csak az őt közvetlenül megelőző tagtól függ, az 1-es után szükségképpen ismét 5-ös következik, az 5-ös után 0 és így tovább. Az ismétlődő számok egy 12-hosszú ciklust alkotnak.

Az első 100 tag 8 ciklusból és 4 további tagból áll; mivel a 99. maradék 0, összesen 9 darab 13-mal osztható szám van az első 100 tag között.

Megjegyzések:

Néhány további felvetődött kérdés:

Melyik maradék hiányzik a sorozatból? Miért?

Mennyiben változik a megoldás, ha az 1 helyett más kezdőtagot választunk?

Véletlen, hogy 12 a periódus hossza?

A sorozat tagjai: 1, 5, 13, 29, 61, 125 stb. Úgy tűnik, hogy a szomszédos tagok különbsége (4, 8, 16, 32, 64) szabályszerűen növekvő 2-hatványokat ad. Valóban igaz ez a sejtés? Miért?

Ugyanezzel a szabállyal megvizsgáltunk más sorozatokat is. Pl. a 8-cal való oszthatóság szempontjából az egyes kezdőtagokra a következő ciklusokat kaptuk: 1, 5, 5, …; 2, 7, 1, 5, 5, …; 3, 1, 5, 5, …; 4, 3, 1, 5, 5, …; 5, 5, …; 6, 7, 1, 5, 5, …; 0, 3, 1, 5, 5, …

3. feladat:

Hányféleképpen rakhatunk sorba 5 egyforma golyót, ha mindegyik piros lehet vagy kék?

Első megoldás:

Pl. a piros golyók száma alapján összeszámolhatjuk a színezéseket. A kapott eredményeket az alábbi táblázat mutatja:

piros golyók száma:	0	1	2	3	4	5
színezések száma:	1	5	10	10	5	1

A 0 és 1 piros golyókból álló esetek egyszerűek.

Ha 2 piros golyó van, és az első az 1-es, akkor a második 4 helyre kerülhet (1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5); ha a 2 golyó közül az első a 2-es, a második már csak 3 helyre kerülhet (2 – 3, 2 – 4, 2 – 5); végül még 3 esetet kapunk, 3 – 4, 3 – 5, 4 – 5; összesen 10 eset.

A 3 piros golyó elhelyezése – szimmetria okok miatt – ugyanaz, mint a 2 piros golyóé. (Ui. ha 3 golyó piros, akkor 2 kék.)

Egyébként a 2 piros golyó esete másképp is megszámolható: ha az 5 helyből 2-t kell kiválasztani a piros golyók számára, az elsőt 5, a másodikat 4 helyre tehetjük, ez $5 \cdot 4 = 20$ eset; de mivel minden lehetőséget kétszer számoltunk (pl. 2 – 5 ugyanaz, mint 5 – 2), az összes eset száma ennek csak a fele.

Összesen 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 lehetőséget kaptunk.

Második megoldás:

Mindegyik helyre 2-féle golyót tehetünk, egymástól függetlenül; ez összesen $2^5 = 32$ lehetőség.

Megjegyzés:

Érdemes engedni, hogy mindkét megoldást elmondják a gyerekek. Mindkettőnek megvan a maga előnye, mint a következő feladatban látni fogjuk.

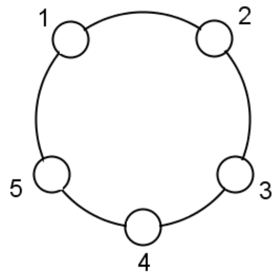
4. feladat:

Szabályos 5-szög csúcsait 2 színnel, pirossal vagy kékkel kiszínezzük. Hányféleképpen lehetséges ez? (Nem tekintünk különbözőnek két színezést, ha forgatással egymásba vihetők.)

Első megoldás:

Pl. a piros csúcsok száma alapján összeszámolhatjuk a színezéseket. A kapott eredményeket az alábbi táblázat mutatja:

piros csúcsok száma:	0	1	2	3	4	5
színezések száma:	1	1	2	2	1	1



2 piros csúcs lehet szomszédos vagy lehet közöttük 2 a „távolság”.

3 piros csúcs esetén 2 közülük mindig biztosan szomszédos, legyen pl. ez a két csúcs az 1-es és a 2-es; ezután a harmadik csúcsot kétféleképpen választhatjuk. (Persze azt is megtehetjük – mint a további esetekben –, hogy a szimmetriára hivatkozunk.)

Összesen $1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$ színezés lehetséges.

Második megoldás:

Mindegyik csúcs 2-féle lehet, egymástól függetlenül; ez összesen $2^5 = 32$ lehetőség. Azonban egy-egy színezést általában ötször számoltunk, mert pl. a ppkkp – pkkpp – kkppp – kpppk – pppkk színezések forgatással egymásba vihetők. Ez alól csak a ppppp, ill. kkkkk színezések kivételek. Így az összes lehetőség száma $\frac{2^5 - 2}{5} + 2 = 8$.

Általánosítás:

Ha egy szabályos p-szög (p prím) minden csúcsát q-féle színnel színezhetjük ki, akkor az összes színezés száma $\frac{q^p - q}{p} + q$.

Megjegyzés:

Érdekes, hogy a $\frac{q^p - q}{p}$ tört, ahol p prím, mindig egész számot ad. Ez azt jelenti, hogy $q^p - q$ osztható p-vel, vagy ha p és q relatív prímek, $q^{p-1} - 1$ osztható p-vel. Ez Fermat tétele. (Alkalmazására lásd 36. feladat 3. megoldását.)

5. feladat (5/1: a feladattípus első példája):

Egy 8x8-as táblázat bal alsó 3x3-as résztáblájának minden mezőjére egy-egy korongot helyeztünk el. Bármely koronggal átugorhatunk vele élben vagy csúcsban szomszédos korongot, ha az érkezési mező üres. Ezekkel az ugrásokkal eljuttathatjuk-e a 9 korongot a bal felső 3x3-as sarokba?

Első megoldás:

Nem lehet eljuttatni a bal felső sarokba a korongokat.

Színezzük a tábázatot sakktáblaszerűen, legyen a bal alsó mező pl. fekete. Ekkor az ugrások során minden korong végig azonos színű mezőkön halad. Kezdetben 5 fekete és 4 fehér mezőn álltak a korongok, a végállapotban 4 fekete és 5 fehér mezőn kellene állniuk.

Második megoldás:

Számozzuk meg a táblázat sorait 1, 2, … , 8-cal, s írjuk minden mezőre azt a számot, ahányadik sorban található. Az ugrás során a korong mindig páros mezőről párosra, páratlanról páratlanra ugrik. Kezdetben a korongok által lefedett mezőkön lévő számok összege $3\cdot(1 + 2 + 3) = 18$, a végállapotban $3\cdot(6 + 7 + 8) = 63$ lenne. Az ugrás során az összeg paritása nem változhat, ez mutatja az ellentmondást.

Harmadik megoldás:

Sávosan színezünk; az első sor legyen fekete, a második fehér, a harmadik ismét fekete stb. Kezdetben 6 színezett mezőn állnak a korongok, a végállapotban csak 3 színezett mező lenne. Ez lehetetlen, mivel az ugrások folyamán a kiindulási és érkezési mezők azonos színűek.

Negyedik megoldás:

Az alábbi színezés mutatja az ellentmondást (elég az egyik szín önmagában is).

3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2

6. feladat:

Összeépíthetünk 5 gyufaskatulyát úgy, hogy mindegyik pontosan 3 másikat érintsen?

Első megoldás:

Az építés nem lehetséges.

Az érintkezéseket számoljuk meg. Ha mindegyik skatulya 3 másikat érint, akkor ez $5\cdot3 = 15$ érintkezést jelent. Minden „kapcsolatot” 2-szer számoltunk, de $\frac{15}{2}$ nem egész szám.

Második megoldás:

Ha kezdetben semelyik két skatulya sem érinti egymást, akkor a szomszédságok száma 0. Minden újabb skatulya felvételével a szomszédságok száma páros sokkal (2, 4, 6) nő. A tervezett végállapotban 15 szomszédság lenne, s ez ellentmondás.

Megjegyzés:

A feladat tisztán gráfelméleti, ezért hangsúlyoztuk azt az érdekességet, hogy az eredmény nem függ a skatulyák alakjától. (A foglalkozáson elhangzott pl. a következő kérdés: „Az építkezés folyamán ki lehet nyitni az üres skatulyát?”)

7. feladat (7/1):

Aladár egy dobozba valahány golyót helyezett el (üresen is hagyhatta), Béla megpróbálja kitalálni a golyók számát. Minden rossz tipp után Aladár egy újabb golyót tesz a dobozba. A játéknak akkor van vége, ha tippjével Béla eltalálja az éppen aktuális golyószámot. Hogyan játsszon Béla?

Megoldás:

Az alábbi táblázat mutatja Béla egy lehetséges stratégiáját.

eltelt idő	0	1	2	3	4	5	…
feltevés a kezdeti golyószámra	0	1	2	3	4	5	…
tipp	0	2	4	6	8	10	…
tippelés sorszáma	1	2	3	4	5	6	…

Eszerint Bélának a páros számokat érdemes tippelnie. Ha a dobozban kezdetben x golyó volt, $(x + 1)$. próbálkozásra a $2x$ tippel talál.

Tanári megjegyzések:

Az algoritmus fogalmát elég tágan értelmeztük a foglalkozásokon: adott kezdeti állapotból megengedett lépések sorozatával előírt célállapotot szeretnénk elérni.

A vegyes témájú feladatok az algoritmusok sokféleségét mutatják meg.

A 3. és 4. feladat kicsit számoltatja a gyerekeket és a később felhasznált Fermat-tételt vezeti be; itt algoritmusnak az esetek rendszeres összeszámolását tekinthetjük. Az algoritmikus gondolkodásra mutat példát a 6. feladat második megoldása is.

Az algoritmus definíciójából kiindulva a legtermészetesebb kérdés, hogy egy célállapot egyáltalán elérhető-e. Ha a válasz igen, meg kell adni egy konstrukciót; ha a válasz nem, bizonyítanunk kell. Erre az egyik leghatékonyabb eszköz, mint láttuk a fenti megoldásokban, az invariáns mennyiségek módszere.

2. foglalkozás

8. feladat:

Jelöljük az előttünk tartott 3x3x3-as Rubik-kocka első, hátsó, jobboldali, baloldali, alsó és felső lapjait rendre E, H, J, B, A, F betűkkel. Ekkor pl. a J1 forgatás azt jelöli, hogy a jobboldali lapon egyet fordítunk (90°) az óramutató járásával megegyező irányban; vagy pl. H3 a hátsó lapon jelöl 3 fordítást stb.

A rendezett kockával folyamatosan, felváltva E1 és J3 forgatásokat végzünk. Igaz-e, hogy egy bizonyos idő után a kocka ismét rendezetté válik?

Első megoldás (manuális konstrukció):

Néhány diák hazament, "kirakta" a kockát (vagyis színek szerint rendezte a lapokat), majd bizonyos számú tekerés után ismét megkapta az alapállapotot.

Második megoldás (egzisztencia):

A kockának véges sok állapota van. Ez azt jelenti, hogy – esetleg nagyszámú tekerés után – előbb-utóbb biztosan ismétlődni fog valamelyik állapot. Azt állítjuk, hogy a forgatások folyamán nem jöhet létre olyan ciklus, amelyből hiányzik az alapállapot.

Jelöljük az alapállapotot A-val. Tegyük fel, hogy a B állapotból x számú forgatás után a B-vel megegyező B' állapotba jutunk. Ez azt jelenti, hogy a kocka valamely helyzetéből x számút forgatva, ugyanazt a helyzetet kapjuk vissza. A kocka geometriai jellemzői függetlenek a színezéstől; ha az A kezdőállapotból végzünk x forgatást, a fentiek miatt akkor is vissza kell jutnunk az A alapállapotba. (Így azt is megkaptuk, hogy a kezdőállapot ismétlődik meg legelőször.)

Megjegyzés:

A 2. feladat megjegyzésében láttunk példát „vegyes” és „tiszta szakaszos” ciklusra is.

Harmadik megoldás:

A kocka első és jobboldali lapja lényegében háromfajta kis kockából áll elő. A lapközéppontú kiskockák minden forgatáskor megtartják helyüket. Az élközép kockákat együtt vizsgálva észrevehetjük, hogy az alapállapotból kiindulva, ha a feladatbeli E1 és J3 forgatásokból 14-et végzünk, visszakerülnek a helyükre. A csúcsokat alkotó kis kockákról ugyanez 18 forgatás után mondható el. Mivel a lapok középpontjai helyben maradnak, ez azt jelenti, hogy ha az alapállapotból kiindulva a végzett forgatások száma 14 és 18 közös többszöröse, akkor a kocka ismét rendezetté válik. 14 és 18 legkisebb közös többszöröse 126, ennyi forgatás után áll vissza először az alapállapot.

Vagyis ebben a megoldásban többet kaptunk: azt is meg tudjuk mondani, hogy legkorábban mikor lesz ismét rendezett a kocka.

9. feladat (9/1):

Felírtuk a táblára 1-től 10-ig a számokat, majd valamelyik kettőt letöröltük, és helyettük felírtuk a különbségük abszolút értékét. Ezt az eljárást ismételgettük addig, míg végül már csak egy szám maradt a táblán. Lehet-e ez a szám 0?

Első megoldás:

Nem lehet.

A táblán minden lépésben eggyel kevesebb szám lesz. Ha két azonos paritású számot törlünk le, helyettük páros szám kerül a táblára; két különböző paritású szám helyett egy páratlan számot írunk vissza; vagyis a táblán lévő páratlan számok száma vagy változatlan marad, vagy kettővel csökken. Kezdetben 5 páratlan szám volt a táblán, ezért az utolsó szám is páratlan lesz.

Második megoldás:

Invariáns mennyiség pl. a táblán lévő számok összegének a paritása. Ez kezdetben 55, minden lépésben csak páros sokkal változhat, tehát a 0 végállapot nem érhető el.

10. feladat (9/2: a 9. feladat folytatása):

Az előző feladatot módosítjuk: lehet-e az elért szám pl. 7?

11. feladat (9/3):
Mutassuk meg, hogy a 9. feladatban végállapotként bármelyik páratlan szám elérhető.

Megoldás (vázlat):
Egy lehetséges gondolat: pl. a páratlan számot kihagyjuk, s a többi segítségével elérjük a 0-t.

12. feladat (12/1):
Egy kocka csúcsaiba egy-egy számot írtunk. Egy lépésben valamely él végpontjaiban álló számokat eggyel-eggyel megnövelhetjük. Elérhető-e néhány lépés elvégzésével, hogy minden csúcson azonos szám álljon, ha a számozás az alaplapon körben 1, 2, 3, 4, a fedőlapon 5, 6, 7, 8? (Az 1-es felett az 5-ös áll stb.)

Megoldás (vázlat):
Viszonylag könnyen elérhető a csupa egyforma helyzet, a diákok több konstrukciót is adtak.

13. feladat (12/2):
Az előző feladatot módosítjuk, a számozás 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. Elérhető-e, hogy minden csúcson azonos szám álljon?

Megoldás:
A kiindulási helyzetben a csúcsokon lévő számok összege 1 (páratlan). A végállapotban minden csúcsban egyforma szám kell, hogy legyen; ezek összege 8-cal osztható (páros). Amikor az élek végpontjaiban álló számokat eggyel-eggyel megnöveljük, az összeg 2-vel nő, tehát paritása megmarad. Ez az ellentmondás mutatja, hogy a kívánt végállapot nem érhető el.

14. feladat (5/2):
El lehet-e juttatni az ábra szerinti 8 korongot az 5. feladatban leírt dámalépésekkel a bal felső 3x3-as sarokba, ha valamelyik mezőt üresen hagyhatjuk?

O	O						
O	O	O					
O	O	O					

Megoldás:
Nem lehet. Az 5. feladat négy megoldása közül az első kettő nem ad ellentmondást, de a többi színezés igen.

Megjegyzés:
Hangsúlyoztuk, hogy a feladatmegoldás szempontjából ezek szerint „semmit sem jelent”, ha egy konkrét színezés alapján nem találunk ellentmondást.

15. feladat (7/2):

A 7. feladat játékát módosítjuk. Aladár a játék elején eldönti, hogy Béla minden rossz tippje után vagy 1, vagy 2 golyóval növeli a dobozban lévő golyók számát. (A döntés végleges: ha az első lépésben pl. 2 golyót tesz a dobozba, később is mindig 2-t kell beletennie.) Kitalálhatja-e Béla az aktuális golyószámot?

Megoldás:

Az alábbi táblázat mutatja Béla egy lehetséges stratégiáját.

eltelt idő	0	1	2	3	4	5	6	…
feltevés a kezdeti golyószámra	0	1	1	2	2	3	3	…
feltevés a golyónövelésre		1	2	1	2	1	2	…
tipp	0	2	5	5	10	8	15	…
tippelés sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	…

A táblázat tipp-sorát úgy képezzük, hogy a kezdeti golyószámhoz (2. sor) hozzáadjuk az eltelt idő és a növelés (1. és 3. sor) szorzatát. Ha pl. kezdetben 10 golyó volt a dobozban, és Aladár minden rossz tipp után 2-vel növeli a golyók számát, akkor a 20. időegységnél (21. sorszám), az 50-es tippel ér el találatot Béla.

Megjegyzés:

A feladat nem nehezebb lényegesen akkor sem, ha 1, 2, 3, … , k-féle (de fix) növelés közül választ Aladár. Az érdemi nehezítés a 34. feladatban található.

Tanári megjegyzések:

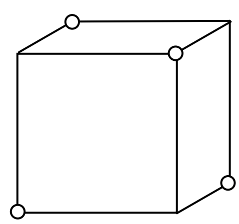
Az algoritmusok elemzésekor újabb kérdések vetődnek fel. Pl. a 11. feladatban minden lehetséges kezdőhelyzetről eldöntöttük, hogy elérhető-e belőlük a végállapot. Hasonló feladatot a következő foglalkozáson is kitűztünk.

Ha már tudjuk, hogy valamely kezdőhelyzetből elérhető a célállapot, akkor érdemes megvizsgálni az algoritmus lépésszámát. Néhány további feladat az optimális lépésszámot vizsgálja meg.

3. foglalkozás

16. feladat (12/3):

A 12. feladatot módosítjuk, a számozás 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 (az alaplap két szemköztes csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van). Elérhető-e, hogy minden csúcson azonos szám álljon?



Megoldás:

Az előző gondolat most nem használható, de az egyforma számokból álló végállapot most sem érhető el.

A kocka csúcsait két csoportra osztjuk úgy, hogy az azonos csoportban lévő csúcsok között ne legyen él. Az egyik csoportba sorolhatjuk az alaplap és a fedőlap két – két szemköztes csúcsát (ábra). Az eljárás folyamán a két csoportokban az ott lévő számok összege egyszerre nő 1-gyel. Mivel kezdetben ez az összeg különböző volt (0, ill. 2), a csupa egyforma számozás nem érhető el.

17. feladat (17/1):

Bergengóciában a Sárkánynak 100 feje van, a Királyfinak viszont olyan Varázskardja, amellyel egy csapásra 33, 21 vagy 17 fejét tudja a Sárkánynak levágni. Igen ám, de az első esetben a Sárkánynak 18 új feje nő ki, a másodikban 36, a harmadik esetben pedig 14. Ha a Sárkány összes feje lehullott, nem nő ki több. Le tudja-e győzni a Királyfi a Sárkányt?

Megoldás:

Az első esetben 15-tel, a harmadik esetben 3-mal csökken, míg a második esetben 15-tel nő a Sárkány fejeinek száma. Ebből következik, hogy a fejek számának 3-as maradéka állandó. Az utolsó vágás előtt a fejek száma 33, 21 vagy 17 kell, hogy legyen. 100 maradéka 3-mal osztva 1, s mivel 33 és 21 maradéka 0, 17 maradéka 2, ezért a Királyfi nem tudja legyőzni a Sárkányt.

18. feladat (5/3):

Az 5. feladat dámaugrásai mellett most a korongokat egy mezővel felfelé is tolhatjuk. Ezekkel a lépésekkel most már nyilván eljuttathatjuk a 9 korongot a 3x3-as bal felső sarokba. Kérdés, hogy mennyi az ehhez szükséges minimális lépésszám?

Megoldás:

O	O	O					
O	O	O					
O	O	O					

A korongoknak függőleges irányban összesen 45 egységnyi lépést kell haladniuk. A sakktábla sávos színezéséből adódik (ábra), hogy legalább három egy egységnyi tolásra szükség van. Mivel az ugrások függőleges irányban legfeljebb 2 mezőt haladhatnak, 21 ugrás és 3 függőleges tolás, összesen 24 lépés elvileg elegendő. Az oszlopokat balról jobbra a, b, …, h betűkkel, a sorokat lentről felfelé 1, 2, …, 8 számokkal jelölve a konstrukció a következő:

A b1 – d3, a2 – c4, c2 – a4, a3 – a5, c3 – c5, a1 – c3, c1 – a3, b2 – b4, d3 – b5 lépéssorozat eredményeképp a 9 korong két sorral feljebb került (itt a lépéseket a kiindulási és az érkezési mezőkkel írtuk le). Ezt az eljárást még egyszer megismételve csak a legfelső 3 mező marad üresen. Ide az alatta lévő 7. sorról feltolva a korongokat, az algoritmus 3 további ugrással befejezhető.

19. feladat:

Egy barkochba játékot vizsgálunk meg. Kitalálandó egy 2-es számrendszerben felírt legfeljebb 300 jegyű szám. Legkevesebb hány kérdéssel lehet biztosan kitalálni a számot?

Első megoldás (lineáris keresés):

Először a szám lehetséges nagyságrendjét becsüljük meg.

A legnagyobb felírható szám $\overline{11...1}$ (300 darab 1-es), ehhez 1-et adva $\overline{100...0}$ (300 darab 0) = 2^{300}-t kapunk. A legkisebb lehetséges szám a 0, így végigpróbálva a 0, 1, 2, 3, … tízes számrendszerbeli számok 2-es számrendszerbeli alakját, legrosszabb esetben 2^{300} próbálkozás után kitalálhatjuk a számot.

Második megoldás (logaritmikus keresés):
Végigkérdezhetjük a számjegyeket. Mivel mindegyik számjegy 2-féle lehet, 300 kérdés biztosan elég.

20. feladat:
Mekkora szám ez a 2^{300}? Becsüljük meg!

Megoldás:
Mivel $2^{10} \sim 10^3$, ezért $2^{300} = (2^{10})^{30} \sim 10^{90}$, vagyis egy több mint 90-jegyű számot kaptunk.

21. feladat:
Próbáljuk megbecsülni, hány molekula van a jelenleg ismert világegyetemben!

Megoldás:
Az ismert világegyetem átmérőjét 200 milliárd fényévre becsültük (?); mivel a fénysebesség $3 \cdot 10^8$ m/s, 200 milliárd fényév = $3 \cdot 10^8 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 200 \cdot 10^9$ méter ~ $2 \cdot 10^{27}$ méter. Ekkora átmérőjű gömb térfogata kb. $4 \cdot 10^{81}$ m^3. 1 m^3-ben átlagosan 10 molekulával számolva (?), $4 \cdot 10^{82}$ darab molekulát kapunk.

Megjegyzés:
Csak érdekességképpen, ennek a számnak mintegy milliárdszorosa a 19. feladat első megoldásában kapott lineáris keresés lépésszáma.

A 19 – 21. feladatok egyrészt azt hangsúlyozzák, hogy a kombinatorikában milyen rettenetesen nagy számokkal dolgozunk; másrészt érzékeltetni kívánják, hogy az algoritmus lépésszámát csökkentő törekvések egyáltalán nem feleslegesek.
Érezhetően nem mindegy, hogy egy algoritmus lépésszáma 300 vagy 2^{300}.

22. feladat (17/2):
A 17. feladatbeli Bergengóciában az új Királyfinak (mi lett a régivel?) új Varázskardot kovácsoltak. Ezzel egy-egy csapással a 100 fejű Sárkány 7, 9 vagy 11 fejét tudja leütni; az egyes esetekben rendre 13, 18 ill. 5 új feje nő ki a Sárkánynak. (Ha a Sárkány összes feje lehullott, most sem nő ki több). Legkevesebb hány suhintással tudja a Királyfi legyőzni Sárkányt?

Megoldás:
A Sárkány feje az egyes esetekben 6-tal vagy 9-cel nő, ill. 6-tal csökken, vagyis a változás ismét 3 többszöröse lehet csak. A 100 3-mal osztva 1 maradékot ad, így a végső csapás előtt 7 feje lesz a Sárkánynak. Csak 6-tal csökkentő vágásokkal nem érhető el 100-ból a 7 (a 6-os maradék 4, ill 1), szükséges egy +9-es vágás is. A konstrukció: 100 (+9), 109 (–6 17-szer), 7 (–7). Összesen 19 vágás, ez a minimális.

23. feladat (23/1):

Egy 2x2-es táblázat alakú táptalaj-cellák közül néhányat megfertőzünk baktériumokkal. Egy-egy lépésben minden olyan cellában, melynek szomszédjai közül páros sok fertőzött, ideiglenesen eltűnik a baktériumtenyészet; és minden olyan cellában, melynek páratlan sok szomszédja fertőzött, ideiglenesen megjelenik a tenyészet. (Szomszéd az élben csatlakozó cella.) Igaz-e, hogy egy idő múlva minden cellában kipusztulnak a baktériumok?

Megoldás:
A szimmetriahelyzeteket figyelembe véve az alábbi kezdőhelyzetek lehetségesek:

1

O	

2

O	O

3

O	
	O

4

O	O
	O

5

O	O
O	O

6

A kapott ciklusok: 1 – 1, 2 – 4 – 1, 3 – 6 – 1, 5 – 4 – 1, tehát valóban igaz, hogy egy idő után minden cellában eltűnik a tenyészet.
Azt is megkaptuk, hogy ez legkésőbb a 2. lépésben következik be.

24. feladat (24/1):
Egy zár, amelyen három nyomógomb van, akkor nyílik ki, ha a gombokat egy előírt sorrendben nyomjuk meg közvetlenül egymás után. Legkevesebb hány gombnyomásra van ahhoz szükség, hogy biztosan kinyithassuk a zárat?

Megoldás:
9 gombnyomás szükséges és elegendő.
A gombokat 1, 2, 3-mal jelölve egy megfelelő 9-nyomásos megoldás: 123121321.
Elvileg 8 nyomás is elegendő lehetne, mert a 3 számnak 6-féle sorrendje van, s az első 2 számmal együtt ez 8 számot ad. Ha azonban az első két gombnyomás *xy*, a következő 3 próbálkozás egyértelmű: *xyzxy*, s innen nem tudjuk „gazdaságosan” folytatni.

4. foglalkozás

25. feladat (12/4):
A 16. feladatban (kocka csúcsaira számokat írtunk, egy-egy lépésben valamely él végpontjaiban álló számokat egyszerre 1-gyel megnövelhetjük) láttuk, hogy a csupa egyforma számokból álló végállapot csak akkor lehet elérhető, ha a két csoportra osztott csúcsokban lévő számok összege ugyanannyi. Kérdés, ez a feltétel elégséges-e?

Megoldás:
Ha a két összeg ugyanaz, mindig elérhető az egyforma számokból álló végállapot.
Pl. a felső lapon kiválasztjuk a legnagyobb számot, s a többit – a függőleges élek segítségével – ugyanekkorára megnöveljük. Ekkor szükségképpen az alaplap két-két szemközti csúcsában megegyezik a számok összege. Kiválasztjuk az alaplapról is a legnagyobb számot, legyen pl. ez az 1-es csúcsnál. Ezután a 2-es szomszédot ugyanekkorára növeljük a 2 – 3 él segítségével. Mivel az 1-es és 2-es csúcsban egyforma számok vannak, valamint az 1 + 3 és 2 + 4-es csúcsban lévő számok összege is ugyanaz, ezért az alaplapon minden csúcsban egyforma szám lesz. Ezután már csak az alaplap és fedőlap 4 – 4 egyforma számát kell „egységesíteni”.

Megjegyzés:

Érdekes felvetődött kérdés: elérhető-e, hogy a kezdeti legnagyobb szám legyen minden csúcsban a végállapotban?

26. feladat (26/1):

Hány egyenes síkvágásra van szükségünk, hogy egy 4x4x4-es kockát 64 darab 1x1x1-es kisebb kockára daraboljunk? (Egyszerre csak egy darabot vághatunk ketté.)

Megoldás:

Minden vágással egy darabot kettéosztunk, vagyis a darabok száma eggyel nő. 63 vágás biztosan kell, s ez – stratégiától függetlenül – könnyen megvalósítható.

27. feladat (26/2):

Az előző feladatot oldjuk meg azzal a módosítással, hogy most a darabokat vágás előtt átrendezhetjük, egymásra is tehetjük stb.

Megoldás:

Minden vágással legfeljebb megduplázhatjuk a darabok számát. Mivel $64 = 2^6$, ezért 6 vágás biztosan kell; a felezéses technikával ez meg is valósítható.

28. feladat (26/3):

Hány egyenes síkvágásra van szükségünk, hogy egy 5x5x5-ös kockát 125 darab 1x1x1-es kisebb kockára daraboljunk? (Minden vágás előtt a darabok átrendezhetők.)

Megoldás:

Mivel $2^6 < 125 < 2^7$, ezért az előző megoldás alapján legalább 7 vágás kell.

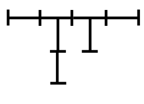
De az első vágás után biztosan marad egy legalább 3x5x5-ös méretű darab. Ezt 75 kisebb részre darabolni legalább 7 további vágás kell ($75 > 2^6$), tehát 8 vágás lehet a minimum.

A helyzet még érdekesebb. Biztosan marad a második vágás után egy 5x3x3-as, a harmadik után pedig egy 3x3x3-as összefüggő test. A 3x3x3-as kockához pedig 6 vágás kell: a középső 1x1x1-es kocka minden lapját ki kell szabadítani.

Meglepő, de összesen 9 vágásra van szükség, éppen úgy, mint a 8x8x8-as kocka esetében.

29. feladat:

Egy moszat növekedését formális szabályokkal írjuk le. A moszat minden egységnyi szakaszának a 0, 1, 2, 3 számjegyek egyikét feleltethetjük meg (a szakasz hossza nem függ a számjegytől!). Ha leágazások keletkeznek, a rájuk vonatkozó számjegyeket zárójelbe tesszük. (Pl. az 11(23)2(2)1 kódú moszat így néz ki:)



A növekedést úgy modellezhetjük, hogy a moszat kódjában szereplő jeleket a növekedést leíró szabályok szerinti jelsorozatra cseréljük. A szabályok:

1. 0 $\rightarrow$ 01
2. 1 $\rightarrow$ (3)2
3. 2 $\rightarrow$ 2
4. 3 $\rightarrow$ 32

5. ($\rightarrow$ (
6.) $\rightarrow$)

Tegyük fel, hogy a moszat növekedését nem befolyásolja más külső tényező. Milyen hosszú lesz 100 időegység múlva, ha a kódja kezdetben 0? (A leágazások is számítanak.)

Megoldás:

Kövessük nyomon néhány időegységig a moszat növekedését!

0 $\rightarrow$ 01 $\rightarrow$ 01(3)2 $\rightarrow$ 01(3)2(32)2 $\rightarrow$ 01(3)2(32)2(322)2 $\rightarrow$ 01(3)2(32)2(322)2(3222)2.

A növekedést úgy értelmezhetjük, hogy minden időegységben egy új leágazás keletkezik, eggyel nő a moszat „váza", valamint a leágazások hossza is. Magyarázatként többféle megoldást adtak a diákok. Észrevették, hogy a sorozat eleje mindig megismétlődik, s csak a 3 $\rightarrow$ 32 szabály okoz növekedést. Egy másik indok a szabályokra vonatkozó indukciós gondolat volt; megint más megoldás az egyes számjegyek számát vizsgálta.

A moszat hossza ez alapján - 100 növekedést tekintve – 1 + 1 + 2 + 3 + … + 100 = 5051 lesz.

30. feladat (24/2):

Egy páncélszekrény három forgótárcsáján kell a 0, 1, ..., 9 számjegyek közül a megfelelőt beállítani, majd egy gombnyomásra kinyitni az ajtót. (Tehát a legkisebb beállítható szám 000, a legnagyobb 999.) A zár a legújabb divatnak megfelelően úgy működik, hogy ha valaki egy hamis számmal próbálkozik, akkor a nyitó kód értékét automatikusan megnöveli eggyel. Pl. ha a beállított kombináció 123 volt, akkor a helytelen próbálkozás után a kombináció 124-re változik; vagy ha 999 volt, akkor 000 lesz stb. Sajnos nem ismerjük a nyitó kódot. Hogyan lehet legegyszerűbben kinyitni a páncélszekrényt?

Első megoldás:

Az alábbi táblázat mutat egy lehetséges stratégiát.

eltelt idő	0	1	2	3	4	…	999
feltevés a kódra	000	001	002	003	004	…	999
próbálkozás	000	002	004	006	008	…	998
sorszám	1	2	3	4	5	…	1000

Második megoldás:

Tökéletes megoldás, ha mindig ugyanazt a számot, pl. 000-t próbáljuk ki (legrosszabb esetben 1000-szer).

31. feladat (23/2):

A baktériumtenyészet-problémát most 3x3-as táblázatra vizsgáljuk meg. Igaz-e, hogy akármilyen helyzetű is a kezdeti fertőzés, egy idő múlva minden cellában eltűnik a tenyészet?

Megoldás:

A 23. feladatban alkalmazott eljárás, az összes eset rendszeres végigpróbálása, most igen bonyolult lenne. Más módszert kell találnunk.

Átfogalmazzuk a problémát. Üres celláknak a +1, baktériumoknak a –1-es számokat feleltetjük meg, s műveletnek tekintjük a számok szorzását. Ezzel a megfeleltetéssel az átfogalmazás a következő:

Egy 3x3-as táblázat minden celláját kitöltjük a +1 vagy –1 számokkal. Ezután minden lépésben minden cellába a vele élben szomszédos számok szorzatát írjuk. Igaz-e, hogy tetszőleges kezdeti kitöltés esetén előbb-utóbb minden cellában +1 fog állni?

Tetszőleges kezdőhelyzetre alkalmazzuk a műveleteket, az egyes cellákban lévő kezdőszámokat $a, b, \ldots, i$-vel jelöljük (s felhasználjuk, hogy $a^2 = b^2 = \ldots = i^2 = 1$):

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

bd	*ace*	*bf*
aeg	*bdfh*	*cei*
dh	*egi*	*fh*

cg	*bh*	*ai*
df	1	*df*
ai	*bh*	*cg*

bdfh	*acgi*	*bdfh*
acgi	1	*acgi*
bdfh	*acgi*	*bdfh*

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Azt kaptuk, hogy legkésőbb a 4. lépésben valóban minden mezőben +1 fog állni, vagyis ennyi idő után biztosan kipusztulnak a baktériumok.

Megjegyzés:
Érdekes, hogy a második lépésben középen mindig +1 lesz (üres cella); vagy szintén a második lépésben négy egyforma állapotú mezőpárt kapunk.

Egyébként ez a nehéz feladat volt az egyetlen, amelyet egyik diák sem tudott megoldani.

5. foglalkozás

32. feladat:
10 szék áll egymás mellett, az első nyolcon felváltva ül 4 fiú és 4 lány. Két egymás melletti gyerek feláll és ugyanebben a sorrendben átül a két üres helyre. Megint két szomszédos feláll és átül, s így tovább. Minél kevesebb helycserével érd el, hogy egymás mellett legyen a 4 fiú és a 4 lány.

Megoldás:
Egy 4 lépéses konstrukció a következő (a két üres széket OO-val jelöljük, s aláhúzzuk az éppen átülő gyerekeket):

FLFLFLFLOO
FOOLFLFLLF
FFLLOOFLLF
FFLLLLFOOF
OOLLLLFFFF

4 lépésnél kevesebb nem elég.
Kezdetben a „jó szomszédságok” száma 0. Az első lépésben ez legfeljebb 1-re nőhet, és a későbbiekben is csak legfeljebb kettesével növelhető. Mivel a végállapotban a „jó szomszédságok” száma 6, ezért valóban nem elég 3 lépés.

Ebben a megoldásban a jó szomszédságok száma rendre 0, 1, 3, 4, 6 volt.

33. (24/3) feladat:

A 30. feladatbeli páncélszekrényt felújították. A modernebb ajtón olyan a zárszerkezet, hogy minden számmal csak egyszer lehet kísérletezni (pl. az 123 eredménytelen kísérlet után az 123-t többé nem szabad kipróbálni, mert az ajtó véglegesen beragad). Ki lehet-e biztosan nyitni ezt az ajtót?

Megoldás:

A 30. feladat megoldásaiban alkalmazott stratégiák most nem alkalmazhatók.

Ha megnézzük az ottani táblázatot, észrevehetjük, hogy az 501. tipp 000, ami az első tipp ismétlése. Módosítsuk ezért pl. úgy a próbálkozásokat, hogy a 499 feltevéshez tartozó 998 tipp után az 501, majd 502 stb. feltevéssel élünk (táblázat).

eltelt idő	0	1	2	…	499	500	501	…	998
feltevés a kódra	000	001	002	…	499	501	502	…	999
próbálkozás	000	002	004	…	998	001	003	…	997
sorszám	1	2	3	…	500	501	502	…	999

Ekkor azonban az utolsónak adódó 500 feltevéshez a 499 próbálkozás tartozna, amivel már korábban kísérleteztünk, tehát nem próbálható újra.

Általában is megmutatható, hogy nem mindig nyitható a páncélszekrény.

Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik egy megfelelő próbálkozássorozat. Ekkor a fentihez hasonló táblázatban az első sorban a 0, 1, 2, … , 999 számok szerepelnek; a második sorban szintén ezek a számok lesznek valamilyen sorrendben (nem lehet ismétlődés, hiszen minden kezdeti kódot ki kell próbálnunk); végül a harmadik sorban szintén ezek a számok állnak valamilyen sorrendben (ennek az az oka, hogy nem lehet kétszer azonos számmal próbálkozni). Mivel a harmadik sorban lévő számok a felettük levő két szám összegeként állnak elő, az összes számot összeadva az első két sor összegének meg kell adni a harmadik sorban lévő számok összegét, ill. 1000-es maradékát. Mivel $1 + 2 + \ldots + 999 = 499\,500$, a $499\,500 + 499\,500 = 499\,500$ egyenletnek kellene teljesülnie mod 1000 felett. Ez azonban lehetetlen, a bal oldal 1000-rel osztható, a jobb oldal nem (500 maradékot ad).

34. (7/3) feladat:

A 7. feladat golyókitalálásos játékát annyiban módosítjuk, hogy most nem tudjuk, hogy Aladár mennyivel növeli egy-egy rossz tipp után a golyók számát (de a növelés mindig ugyanannyi). Kitalálhatja-e Béla a golyók számát?

Megoldás:

Ezt a szorgalmi feladatot idő hiányában nem beszéltük meg. Bonyolult, de jó megoldást kaptam egy diáktól. A probléma tulajdonképpen a racionális számok megszámlálhatóságával ekvivalens, s a legegyszerűbb megoldása a következő:

0, (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3), (4, 0) stb., ahol a számpárok első tagjai jelentik a kezdeti golyószámot, a második tag pedig a növelés mértékét.

Számítógépes támogatás

A foglalkozásokat olyan „menet közben kitűzött” feladatok megbeszélésével zártuk, amelyekhez számítógépet használhattak a diákok.

35. feladat:

Van-e a 17-nek olyan többszöröse, amelyik 2001-re végződik?

Első megoldás:

A válasz igenlő. Számítógép segítségével a 142001, 312001, 482001, 652001 stb. számokat találtuk.

Második megoldás:

A számítógépes megoldás értékeit megfigyelve észrevehetjük, hogy a 2001 előtti számok, 14, 31, 48, 65 stb., 17-tel növekednek. Ez az észrevétel egy másfajta bizonyításra, a skatulya-elv alkalmazására ad alkalmat.

Tekintsük a 2001, 12001, 22001, 32001, ... , 162001 számokat. Ha ezek között van 17-tel osztható, akkor készen vagyunk (a feladat nem követelte meg, hogy konkrétan meg is adjunk egy ilyen számot).

Ha nincs közöttük 17-tel osztható szám, akkor a lehetséges 1, 2, ... , 16 maradékok közül legalább egy ismétlődik, vagyis két szám ugyanazt a maradékot adja 17-tel osztva. Legyen ez a két szám $\overline{x2001}$ és $\overline{y2001}$ alakú ($x < y$, x lehet 0 is, y legfeljebb 16).

A két szám maradéka azonos, tehát különbségük osztható 17-tel. A különbségük $\overline{(y-x)0000}$ alakú. Mivel 17 és 10 000 relatív prímek, csak $17 \mid y - x$ lehetséges. Ellentmondásra jutottunk, hiszen x és y a 0, 1, 2, ... , 16 számok valamelyike.

Vagyis biztosan található a 2001, 12 001, 22 001, 32 001, ... , 172 001 számok között 17-tel osztható.

Harmadik megoldás:

Megpróbálhatjuk visszaszorzásos módszerrel megkonstruálni a számot. Az írásban végzett szorzás algoritmusát követve egy

	a	b	c	d	e	f	·	1	7
							g	h	I
						j	k	l	
					m	n	o		
+				p	q	r			
				s	t	2	0	0	1

alakú táblázatban szereplő $a, b, \dots, t$ számjegyeket kell meghatároznunk.

Rögtön adódik $i = 1$, ezért $f = 3$, $h = 5$, $g = 0$. Most $h = 5$ miatt $l = 5$, $e = 5$, $k = 8$, $j = 0$. Tovább folytatva a visszaszorzást (és figyelve az átvitelekre), az alábbi táblázatot kapjuk:

			8	3	5	3	·	1	7
								5	1
							8	5	
						5	1		
+				1	3	6			
				1	4	2	0	0	1

Ez azt jelenti, hogy minden 8353 végű szám 17-szerese 2001-re végződik. Pl.: $18\,353 \cdot 17 = 312\,001$, $28\,353 \cdot 17 = 482\,001$ stb.

36. feladat:

Van-e az 1, 11, 111, … sorozatban olyan szám, amely 17-nek többszöröse?

Első megoldás:

A számítógépes programot most kissé nehezebb volt megírni, hiszen az egész típusú számokat csak néhány byte-on tárolja a gép. Érdemes észrevenni, hogy az 1, 11, 111, … sorozatban bármely szám az előző 10-szeresénél 1-gyel nagyobb; tehát egyszerűen egy változóban tárolhatjuk az éppen vizsgált szám hosszát, valamint maga a szám helyett elég a szám 17-es maradékával dolgozni.

A futási eredmények azt mutatták, hogy a 16, 32, 48, 64 stb. darab 1-esből álló számok oszthatók 17-tel.

Második megoldás:

A 35. feladat megoldásához hasonlóan okoskodunk.

Tekintsük az 1, 11, 111, ... , $\overline{11...1}$ (17 darab 1-es) számokat. Ha ezek között van 17-tel osztható, akkor készen vagyunk.

Ha nincs közöttük 17-tel osztható szám, akkor van két szám, amelyik ugyanazt a maradékot adja 17-tel osztva. Legyen ez a két szám pl. az x és y darab 1-esből álló szám ($x < y$).

A két szám maradéka azonos, tehát különbségük osztható 17-tel. A különbségük $\overline{11...100...0}$ alakú szám, $y - x$ darab 1-esből és x darab 0-ból áll. Mivel 17 és 10 relatív prímek, csak $17 \mid \overline{11...1}$ ($y - x$ darab 1-es) lehetséges. Ellentmondásra jutottunk, hiszen $y - x$ kisebb 17-nél.

Vagyis biztosan található az 1, 11, 111, ... , $\overline{11...1}$ (17 darab 1-es) számok között 17-tel osztható.

Harmadik megoldás:

Az előző megoldás nem tudta megadni a keresett számot, csak létezését igazolta. Ebben a megoldásban megkonstruáljuk a számokat.

Felhasználhatjuk a 4. feladatban megkapott Fermat-tételt, mely szerint $10^{16} - 1$ osztható 17-tel. A $10^{16} - 1$ szám 16 darab 9-esből áll, s mivel 17 és 9 relatív prímek, a 16 darab 1-esből álló szám osztható lesz 17-tel. Nyilván ehhez a számhoz hozzáadva 10^{16}-szorosát, az így kapott 11…1 (32 darab 1-es) szám is osztható lesz 17-tel stb.

Megjegyzés:

Érdekes kérdés: Honnan tudjuk, hogy a 16 darab 1-esből álló szám a *legkisebb,* amelyik 17-tel osztható?

37. feladat:

10 golyót néhány kupacra osztunk szét. Ezután minden kupacból kiveszünk egy golyót, s ezekből egy új kupacot készítünk. Ezt az eljárást folytatva mit tapasztalunk?

Megoldás:

(A feladatot nem beszéltük meg a foglalkozáson.)

Számítógépen futtatva a szimulációt észrevehetjük, hogy előbb-utóbb kialakul az 1, 2, 3, 4 stabil kupacelrendezés. Ez a nehéz bizonyítás, kedves olvasó, házi feladat.