Dr. Szánthó Gyula

Parabola és kör a koordinátarendszerben

A parabola simulókörének meghatározása elemi matematikai módszerekkel

Helyezzük a parabolát a Descartes-féle koordinátarendszerbe úgy, hogy csúcsa az origóban, fókuszpontja pedig az y-tengelyen legyen (központi helyzetű parabola). Egyenlete ekkor a szokásos jelölésekkel:

$$y = ax^2 \tag{1}$$

A K(u;v) középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \tag{2}$$

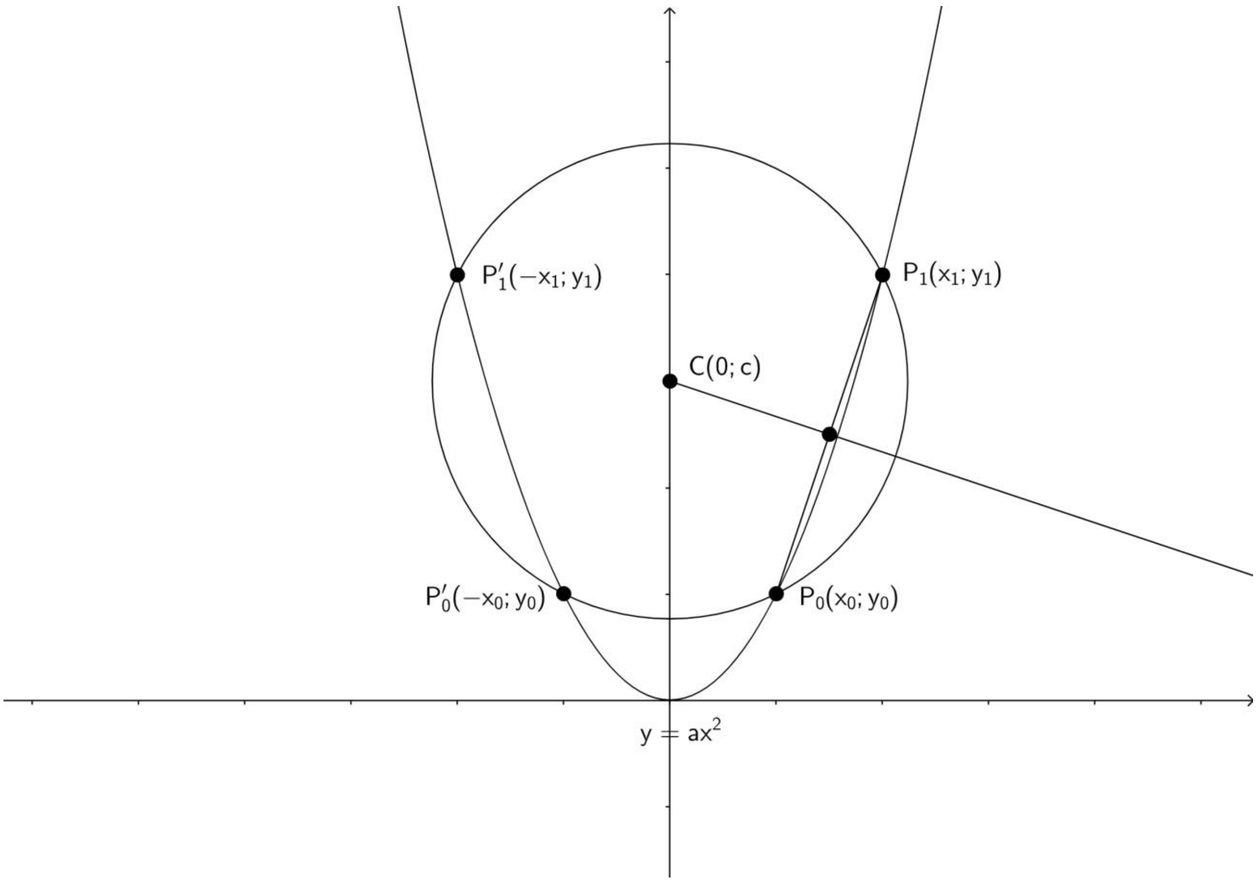
A fenti egyenletrendszerből kifejezve y-t, ez kapjuk:

$$a^2x^4 + (1-2av)x^2 - 2ux + u^2 + v^2 - r^2 = 0 \tag{3}$$

A (3) negyedfokú polinomegyenlet megoldásai adják a két alakzat metszéspontjainak (érintési pontjainak) abszcisszáit, amennyiben a két alakzatnak van közös pontja. Az algebra alaptétele miatt (3)-nak legfeljebb 4 valós megoldása lehet.

Bebizonyítjuk: bármely $P_0(x_0;y_0)$ ponthoz lehet találni még 3 parabolapontot, melyek P_0-lal együtt egy kör kerületén helyezkednek el. Tegyük fel egyelőre, hogy P_0 nem a parabola csúcspontja, vagyis $x_0 \neq 0$.

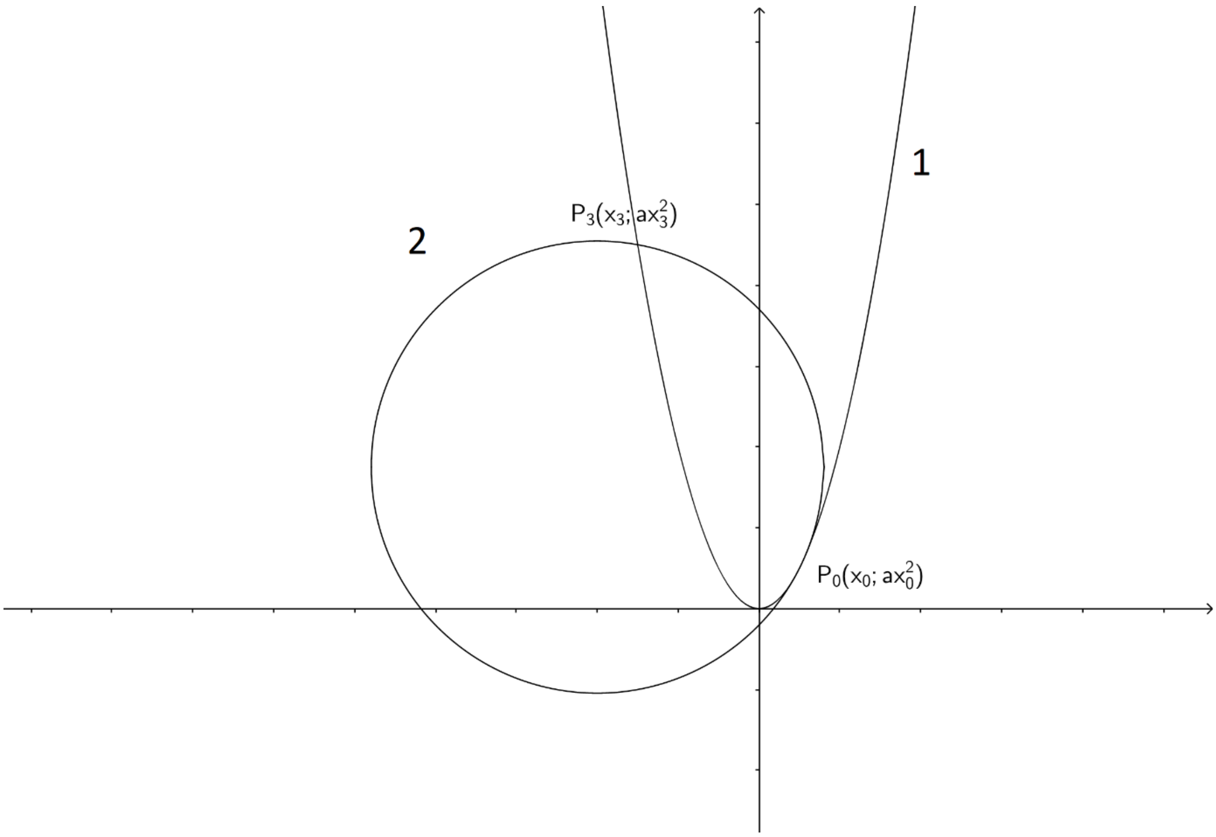
Rajzoljunk egy P_0-on átmenő olyan egyenest, melynek a parabolával való másik metszéspontja $P_1(x_1;y_1)$, $x_1 \neq 0$, továbbá P_0P_1 felezőmerőlegese nem megy át az origón. P_0P_1 felezőmerőlegesének az y tengellyel való metszéspontját jelöljük C(0;c)-vel. C-t egy CP_0 sugarú K_1 kör középpontjának tekintve, K_1 szimmetria-okokból négy pontban fogja metszeni a parabolát: P_0-ban, P_1-ben és ezeknek a pontoknak az y tengelyre vonatkozó tükörképeiben: $P_0'(-x_0;y_0)$-ban és $P_1'(-x_1;y_1)$-ben. (1. ábra). Ezek a pontok egyszeres gyököket jelölnek: (3)-ban x_0, x_1, $-x_0$, $-x_1$ mindegyikének a multiplicitása 1. Nulladrendű metszéspontoknak is nevezzük őket, jelezve ezzel, hogy a két görbének egyik metszéspontban sincs közös érintője.



1. ábra

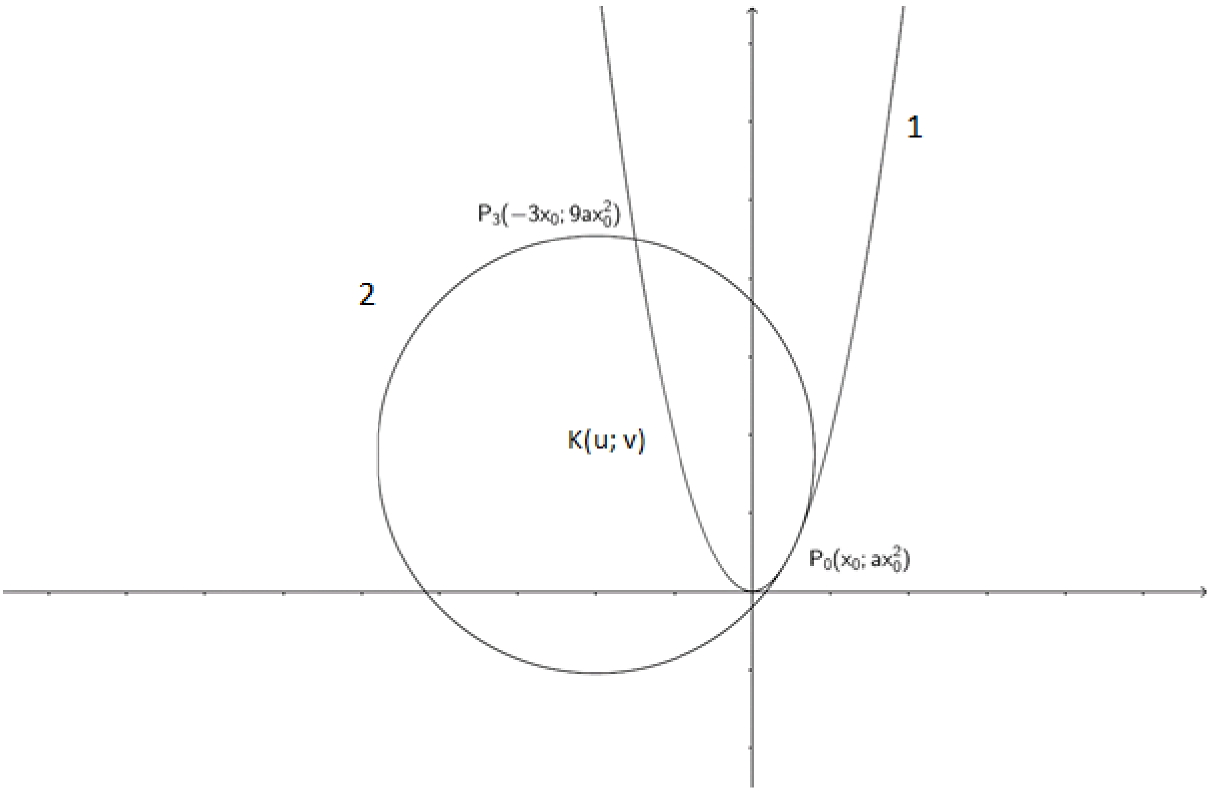
A három pont egyike, pl P_0', a parabola görbéjén haladva jusson el P_0-ba úgy, hogy a $P_0'P_0$ szakasz mindig a P_0-ba vezető parabolaív húrja legyen. P_0-ban ekkor az így kapott körnek a parabolával közös érintője lesz. Mivel az érintő a szelők határhelyzete, a $P_0'P_0$ szelő a „találkozáskor" közös érintővé alakul. x_0 multiplicitása tehát kettő. Amikor a harmadik pont, mondjuk P_1 is a fenti módon P_0-ba ér, P_0-ban már olyan érintési pontot kapunk, amely abszcisszájának, x_0-nak a multiplicitása 3. Ekkor már itt másodrendű érintkezési pontja lesz a parabolának és az új, $K(u;v)$ középpontú k körnek. K rajta lesz a P_0-ban az érintőre emelt merőlegesen – a parabola normálisán.

Amennyiben kikötjük, hogy a – most már a multiplicitásokkal együtt háromszoros – x_0 és az eredetileg $-x_1$ (egyszeres multiplicitású) x_3 gyök a kör (2) és a parabola (1) metszéspontjait szemléltessék (2. ábra), akkor a gyökök és együtthatók kapcsolatait leíró Viéta-formula alapján – mivel (3) olyan negyedfokú egyenlet, melyben a harmadfokú tag együtthatója eltűnik, $-P_1'$ olyan P_3 pontba kerül, mely x_3 abszcisszájára fennáll: $3x_0 + x_3 = 0$, azaz $x_3 = -3x_0$.



2. ábra

P_3 azonban a parabolának is pontja, így $y_3 = 9ax_0^2$ (3. ábra)



3. ábra

Jelölje K(u;v) annak a körnek a középpontját, mely P_0-ban érinti a parabolát és P_3-at is tartalmazza.

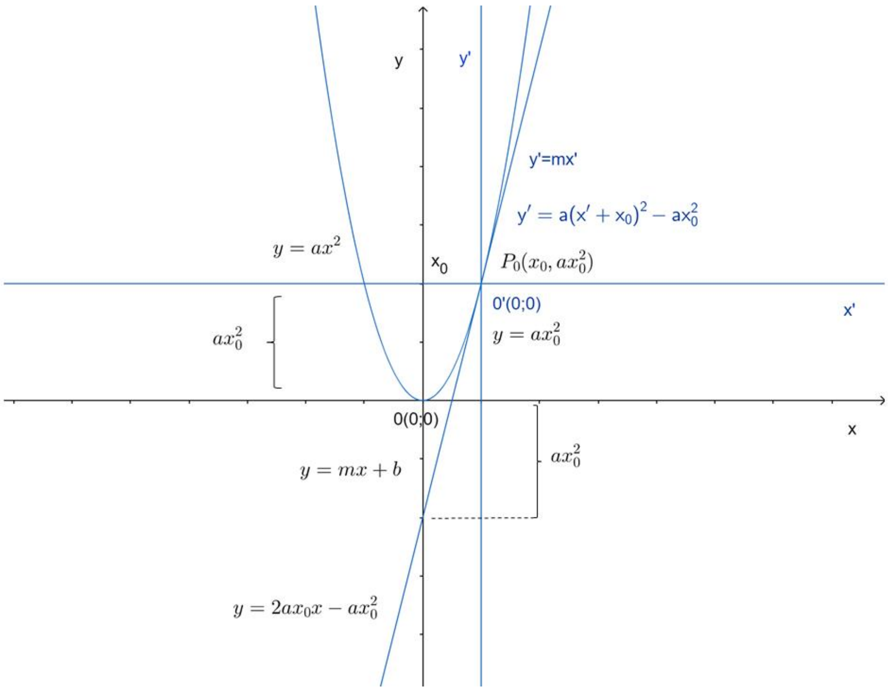
$\overline{KP_0}$ merőleges lesz a P_0-beli érintőre, $\overline{P_3P_0}$pedig húrja lesz a körnek.

Határozzuk meg most az $y = ax^2$ parabola érintőjét a $P_0(x_0;ax_0^2)$ pontban!

Egy – a szokásos jelölésekkel adott $y = mx + b$ egyenes – akkor lesz érintője egy $y = f(x)$ görbének a $P_0(x_0;f(x_0))$ pontban, ha az egyenes a P_0 ponton áthaladó a parabolaíven P_0-hoz egyre közelebb kerülő szelők határhelyzeteként egyetlen pontban, P_0-ban érinti f(x)-et. (a parabolának minden P_0 pontjához egyértelműen létezik ilyen érintő).

Esetünkben $f(x) = ax^2$. A szelők úgy közelítenek P_0-hoz, hogy P_0' mozog a görbén P_0 felé (1. ábra).

Toljuk el a koordinátarendszert önmagával párhuzamosan úgy, hogy az origó az érintési pontba kerüljön (4. ábra)



4. ábra

Az $y = ax^2$ parabola ekkor az

$$y' = a(x' + x_0)^2 - y_0,$$

$$\text{vagy } y' = a(x' + x_0)^2 - ax_0^2$$

egyenletű parabolába megy át. Az érintő az új (transzformált) koordinátarendszer origóján halad keresztül, így ebben a helyzetben egyenlete

$y' = mx'$ lesz (iránytényezője, m megegyezik az eredeti érintő iránytényezőjével, hiszen a koordinátarendszert önmagával párhuzamosan toltuk el). Az érintőnek az új koordinátarendszerben kapott egyenletét vizsgálva, m értékét akkor kapjuk meg, ha azt keressük, hogy az $y' = mx'$ egyenes és a parabola $y' = a(x' + x_0)^2 - ax_0^2$ egyenleteiből előálló

$$mx' = a(x' + x_0)^2 - ax_0^2 \tag{4}$$

egyenletnek milyen m esetén lesz egyetlen megoldása?

(4)-ből $$ax'^2 + 2ax_0 x' - mx' + ax_0^2 - ax_0^2 = 0$$

$$ax'^2 + (2ax_0 - m)x' = 0$$

$$x'\left(ax' + (2ax_0 - m)\right) = 0$$

ami akkor ad egyetlen megoldást, ha $2ax_0 = m$.

Az érintő egyenlete így az eredeti koordinátarendszerben $y = 2ax_0 x + b$ lesz, továbbá $x = x_0$ esetén $ax_0^2 = 2ax_0^2 + b$, ahonnan $b = -ax_0^2$.

Az eredeti koordinátarendszerben tehát az érintő egyenlete:

$$y = 2ax_0 x - ax_0^2 \tag{5}$$

az x tengellyel való metszéspont x koordinátájára pedig fennáll:

$$ax^2 = 2ax_0 x - ax_0^2 \tag{5/1}$$

Az érintő tehát az y tengelyt $-ax_0^2 = -y_0$ -nál, az x tengelyt pedig ((5)-ben y helyére 0 -t írva) $x = \frac{x_0}{2}$-nél metszi.

Ez az egyenes valóban egy pontban, P_0–ban érinti a parabolát.

Az (5/1) egyenletből kapott $a(x-x_0)^2 = 0$ másodfokú egyenletnek tényleg egyetlen, kettős megoldása van: $x = x_0$.

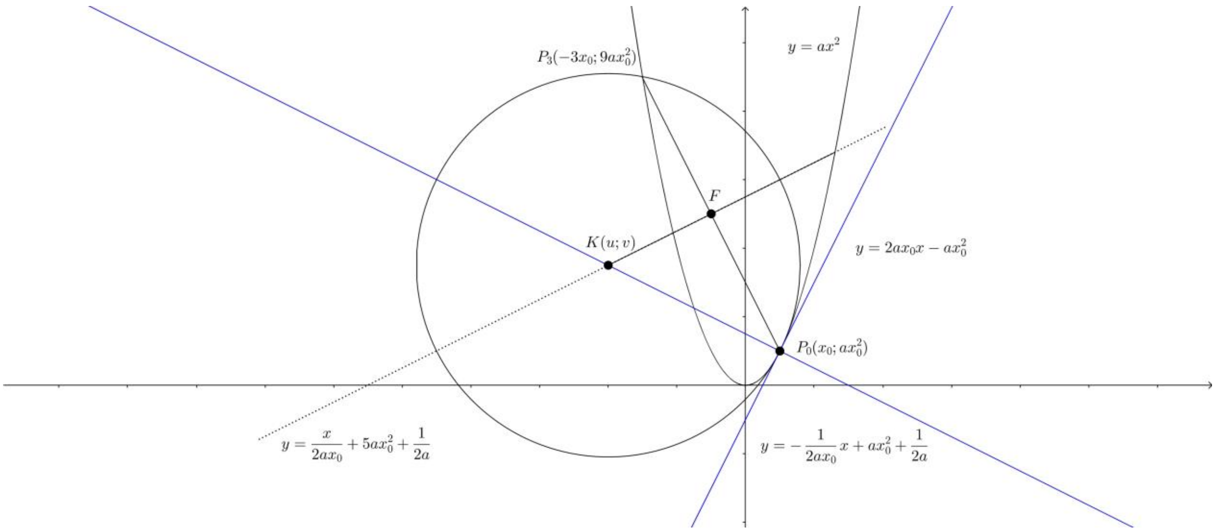
Az $x = x_0$ (az y tengellyel párhuzamos egyenes) is ugyanebben a pontban *metszi* a parabolát, de ekkor nincs közös érintő: a parabola görbéje sehol nem lesz párhuzamos az y-tengellyel, az $x = x_0$ egyenes viszont mindig párhuzamos vele, így a parabolának nem lehet sem szelője, sem érintője.

A simulókör (görbületi kör) egyik definíciója (a mi jelöléseinkkel) a következő:([2], 295. oldal) „A görbe P_0 pontbeli görbületi körének a görbe P_0', P_1, P_0 pontjain átmenő körnek azt a határhelyzetét nevezzük, amikor $P_0' \to P_0$ és $P_1 \to P_0$ egyszerre. A görbületi kör K(u;v) középpontját a görbe (parabola) P_0

pontjához tartozó görbületi középpontjának nevezzük.” (3)-nak ekkor P_0-ban (a kör érintési pontjában) háromszoros gyöke van (x_0 multiplicitása 3), így a kör másodrendben érinti a parabolát.

[6]- ban a definíció így olvasható „a görbületi kör *legalább* másodrendben érinti (a görbét) az adott P_0 pontban.”

A P_0 érintési ponthoz tartozó K(u;v) görbületi középpont ezután már megszerkeszthető, adatai kiszámíthatóak.



5. ábra

K(u;v) ugyanis rajta lesz a P_0 pontban a parabola érintőjére, (5)-re emelt merőlegesen, az

$$y - y_0 = \frac{-1}{2ax_0}(x - x_0), \tag{6}$$

vagyis az)

$$y = \frac{-1}{2ax_0}x + ax_0^2 + \frac{1}{2a}$$

egyenesen, másrészt a P_0P_3 szakasz felezőmerőlegesén. A felezőpont:

$$F(-x_0;5ax_0^2),$$

a P_0P_3 felezőmerőlegesének az egyenlete pedig ez lesz:

$$y - 5ax_0^2 = \frac{1}{2ax_0}\big(x - (-x_0)\big)$$

$$y = \frac{1}{2ax_0}x + 5ax_0^2 + \frac{1}{2a}$$

A simulókör középpontjának u, v koordinátáit tehát az alábbi egyenletrendszer megoldásai adják:

$$\left.\begin{aligned} v-\mathrm{a}x_0^2 &= -\frac{1}{2ax_0}(u-x_0) \\ v-5\mathrm{a}x_0^2 &= \frac{1}{2ax_0}(u-(-x_0)) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

amiből $-4ax_0^2=\frac{1}{ax_0}u$

tehát $u=-4a^2x_0^3$ (7/a)

illetve $2v-6ax_0^2=\frac{1}{a}$

azaz $v=3ax_0^2+\frac{1}{2a}$, (7/b)

a simulókör sugara pedig a $\overline{KP_0}$ távolság:

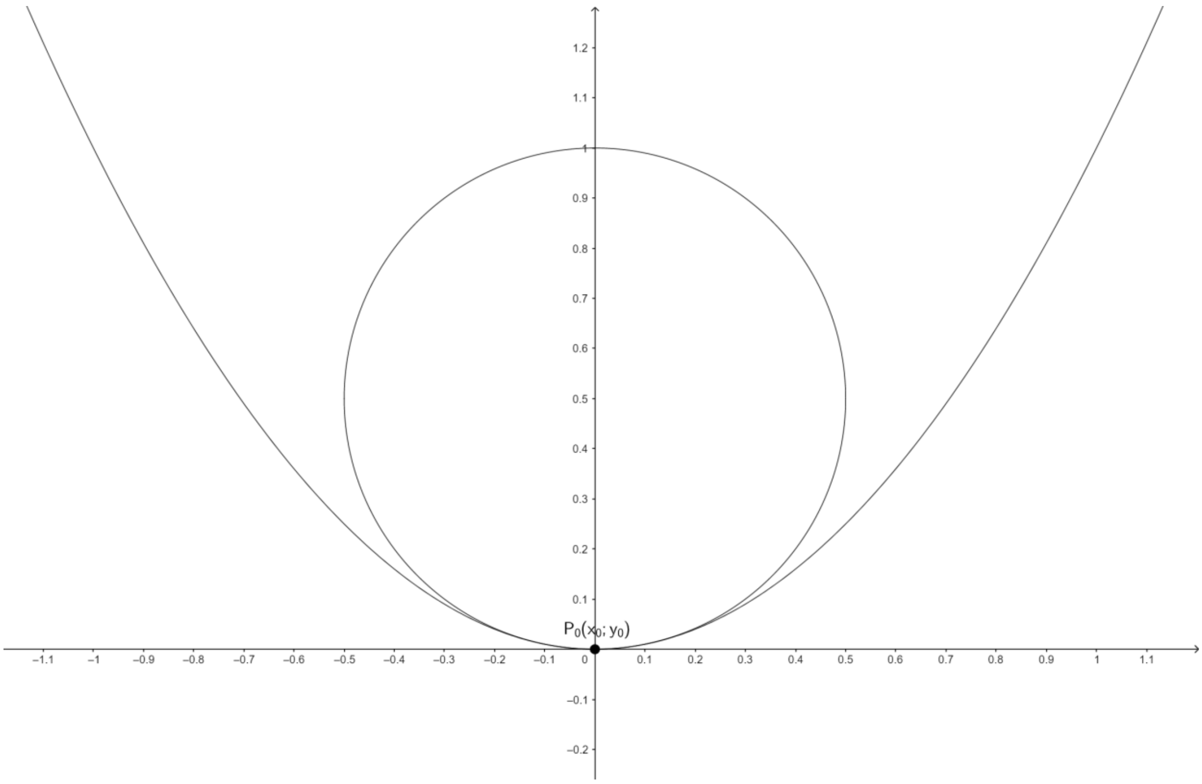
$$r=\sqrt{(-4a^2x_0^3-x_0)^2+\left(3ax_0^2+\frac{1}{2a}-ax_0^2\right)^2}$$

$$=\sqrt{(4a^2x_0^3+x_0)^2+\left(2ax_0^2+\frac{1}{2a}\right)^2}$$

$$r=\sqrt{16a^4x_0^6+12a^2x_0^4+3x_0^2+\frac{1}{4a^2}} \qquad (7/c)$$

x_0 = 0 esetén az origó – azaz a parabola csúcspontja – négyszeres gyöke lesz (3)-nak, így ebben az esetben harmadrendű érintkezésről beszélünk.

Vizsgáljuk most meg ezt, az X_0=0 esetet!



6. ábra

Felezőmerőlegest most nem találunk, de számítással meg tudjuk határozni a simulókör sugarát. A körközéppont nyilvánvaló módon a parabola tengelyén, vagyis az y-tengelyen lesz. A kör egyenlete így

$x^2 + (y - v)^2 = v^2$ lesz, ahol $|v| = r$ a kör sugara. (2) ekkor így alakul:

$x^2 + (ax^2 - v)^2 = v^2$

amiből

$$(ax^2 - v)^2 + x^2 = v^2,$$

$$\text{illetve } x^2 (a^2x^2 + 1 - 2av) = 0 \qquad (8/a)$$

8/a-nak akkor és csak akkor lehet $x = 0$ négyszeres gyöke, ha

$$1\text{-}2av = 0,$$

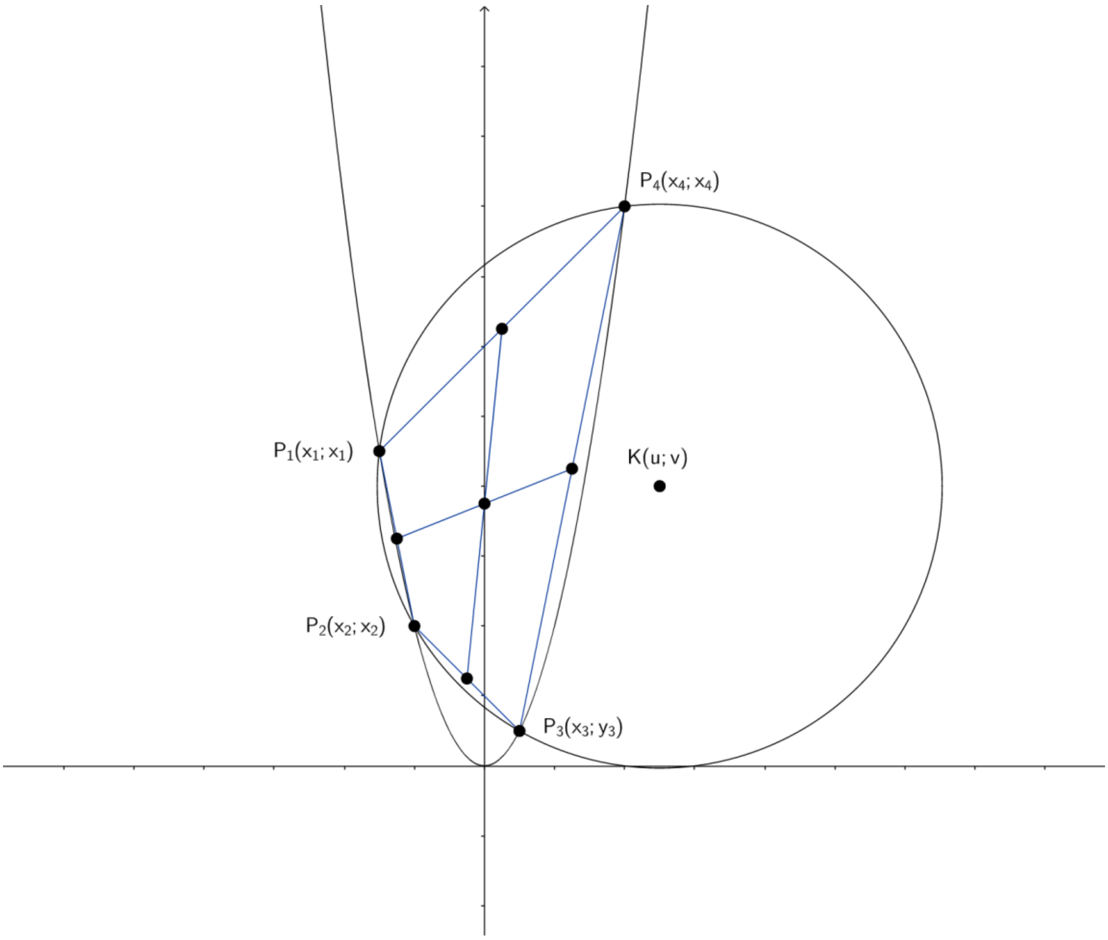
$$\text{azaz } v = \frac{1}{2a}$$

A simulókör sugara tehát ekkor:

$$r = \left|\frac{1}{2a}\right| \qquad (8/b)$$

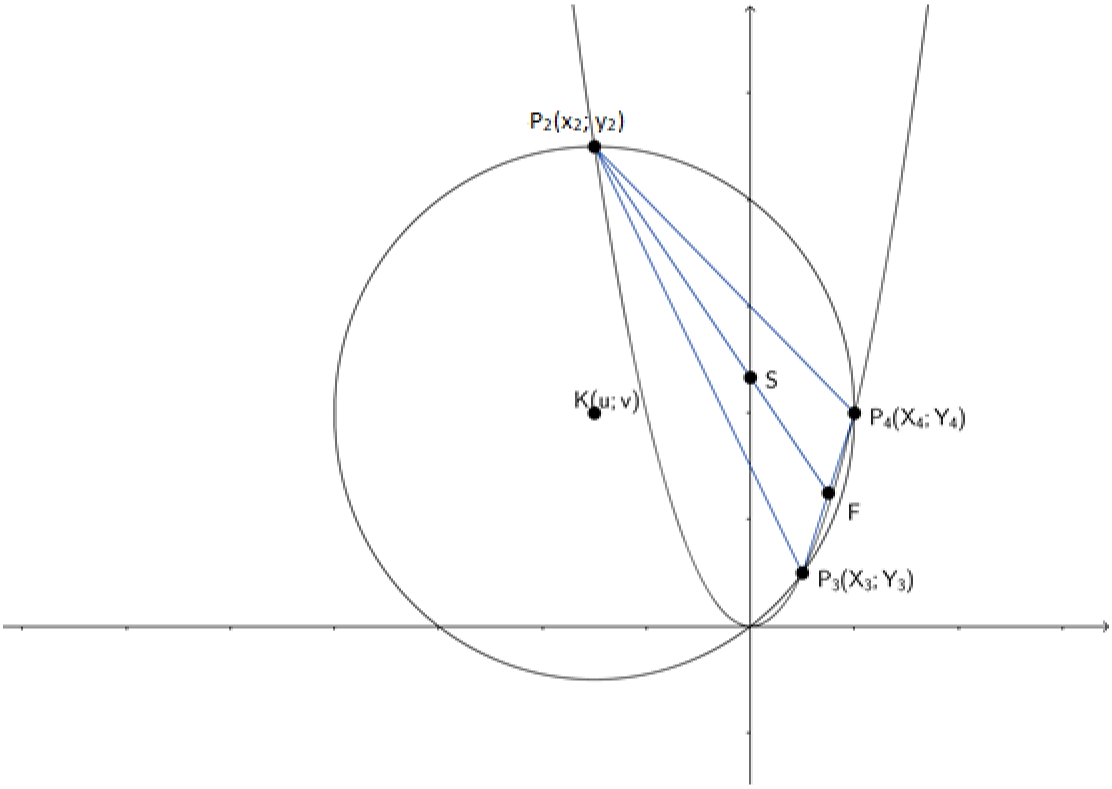
Gondolatmenetünk egy geometriai következményét említjük meg:

1. Egy parabolának és egy körnek legyen 4 különböző nulladrendű metszéspontja. Rajzoljuk meg az általuk meghatározott húrnégyszöget. A négyszög szomszédos oldalainak felezőpontjait összekötve egy paralelogrammát kapunk, a szemben levő oldalak felezőpontjait összekötő egyenesek pedig a paralelogramma átlói. Nem nehéz belátni, hogy az átlók felezőpontjai az y-tengelyen vannak (az abszcisszák előjeles összege nulla). Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, az átlók felezőpontja az y-tengelyen, vagyis a parabola tengelyén van.



7. ábra

Amennyiben az egyik metszéspont pl. $P_1(x_1;y_1)$ az origó ($x_1=0$, $y_1=0$), azt elhagyva egy olyan háromszöget kapunk, melynek súlypontja az y-tengelyen van (8. ábra).



8. ábra

A háromszögben bármely két csúcs abszcisszájának összege ugyanis ekkor a harmadik csúcs abszcisszájának az ellentettje lesz.
Bármely két csúcs felezőpontjának abszcisszája tehát a harmadik csúcs abszcisszája ellentettjének a felével egyenlő, vagyis a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenesnek – a háromszög súlyvonalának – éppen a súlypontjában. S-nek az x-koordinátája lesz tehát 0. Ez pedig állításunkat igazolja.

$x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_4 + x_3 = -x_2$

$2 \cdot (x_4+x_3)/2 = -x_2$. -

Eredményünknek – a koordinátageometriai következmények mellett – fizikai következményei is lehetnek. Lássunk erre is két esetet:

2. A 9. ábrán látható parabola alakú vájat A(1;1) pontjából kezdősebesség nélkül indul egy pontszerűnek tekinthető, m = 0,2 kg tömegű test (súrlódás, közegellenállás elhanyagolható). Mekkora erővel nyomja a test a $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$ pontban a vájat falát? (Az adatok m-ben értendők, a nehézségi gyorsulás értéke $g = 10\frac{m}{s^2}$).

Megoldás:

A parabola $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$ pontbeli érintőjének egyenlete: y = $\sqrt{2}x - \frac{1}{2}$

A vájat a B pontban erre az érintőre, - egyben a simulókör érintőjére - merőleges irányban tud erőt kifejteni, olyan egyenes irányában, melynek iránytangense $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, vagyis az

$$y = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + 1 \qquad (9)$$

egyenes mentén. (9) egyúttal a B ponthoz tartozó simulókör középpontját is tartalmazza. Az érintő iránytangense $tg\alpha = \sqrt{2}$, így $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (9. ábra)

Az egyik erő, melyet a vájat falának kell kifejteni, a tömegpont $G = 0{,}2kg \cdot 10\frac{m}{s^2} = 2N$ súlyának a lejtő B pontbeli érintőjének az irányára merőleges G_α összetevője:

$$G_\alpha = mgcos\alpha = 2N\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{12}}{3} \approx 1{,}1547N$$

A másik az $F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$ centripetális erő, ahol $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2}\frac{1}{2}m} = \sqrt{10}\frac{m}{s}$, a lecsúszó tömegpont B pontbeli sebessége, r pedig a parabola B pontbeli simulókörének a sugara, tehát

$$r = \sqrt{\frac{16}{(\sqrt{2})^6} + \frac{12}{(\sqrt{2})^4} + \frac{3}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6{,}75m} \approx 2{,}598m,$$

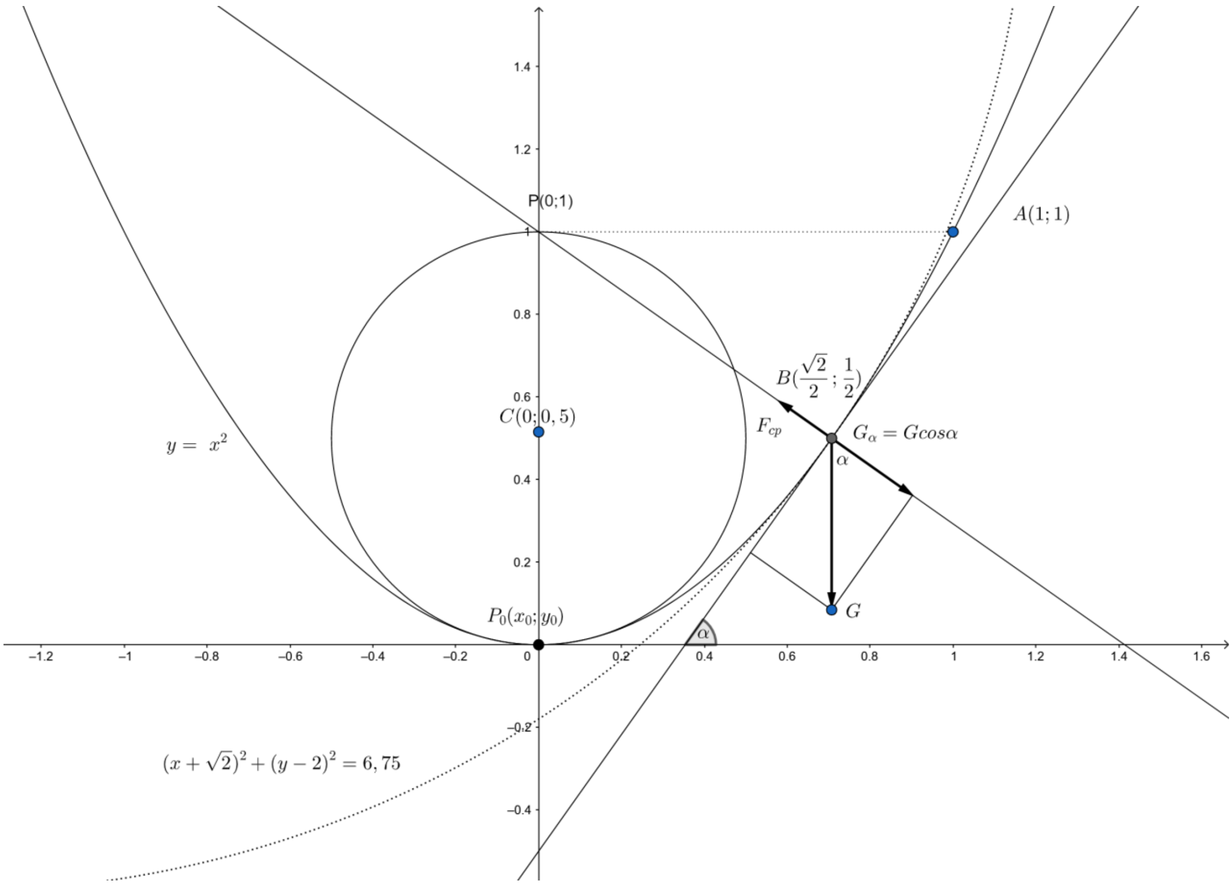
így $F_{cp} = \frac{0{,}2kg10\frac{m^2}{s^2}}{\sqrt{6{,}75m}} = \frac{2}{\sqrt{6{,}75}} = \frac{\sqrt{27}}{6{,}75} = \frac{\sqrt{432}}{27} \approx 0{,}7698N$

A lecsúszó, m = 0,2 kg tömegű test tehát a B pontban összesen

$$F = G_\alpha + F_{cp} = \left(\frac{\sqrt{12}}{3} + \frac{\sqrt{432}}{27}\right)N \approx 1{,}1547 + 0{,}7698 = 1{,}9245N$$

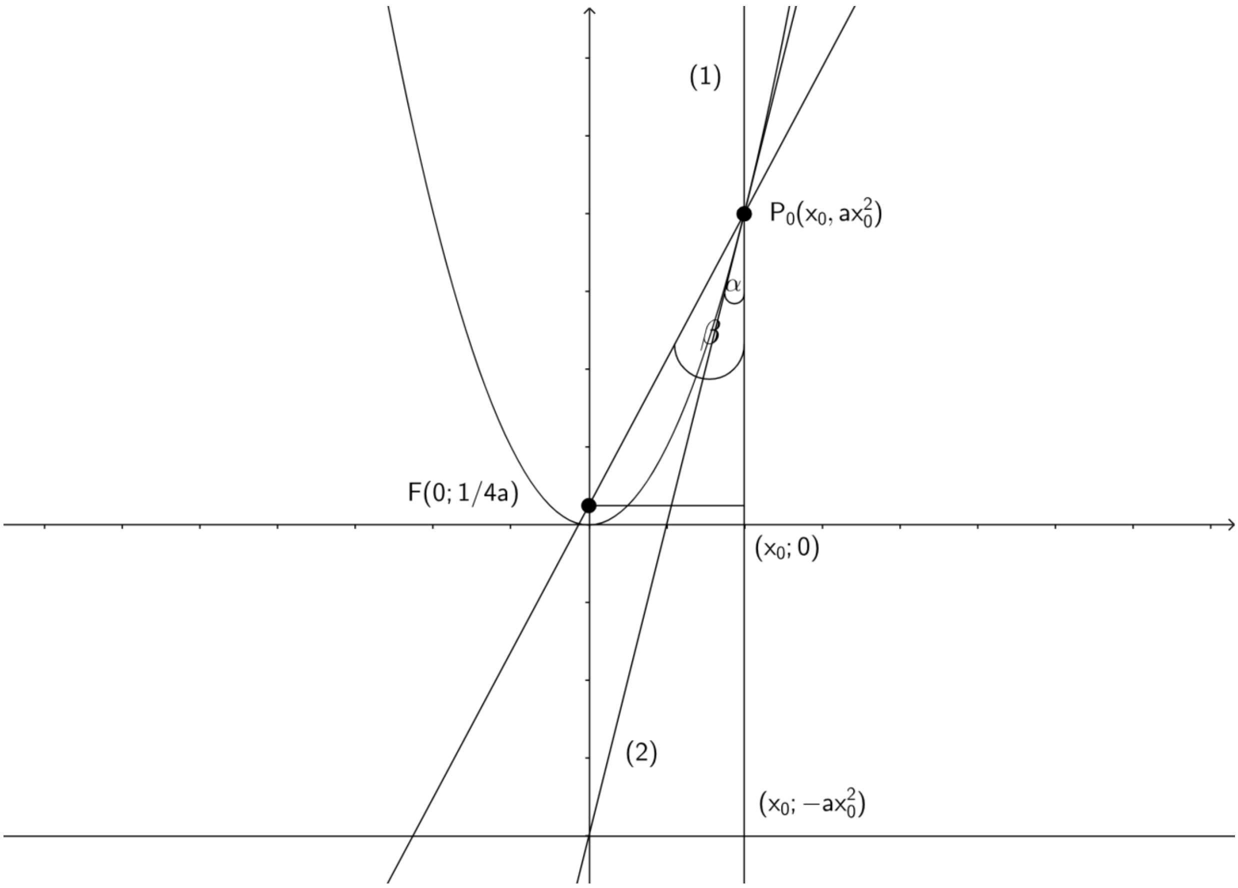
erővel nyomja a vájat falát.

A Középiskolai Matematikai Lapok 2869-es fizika feladata (1995. februári füzet, megoldás: 1996 januári füzet. 51. oldal) tulajdonképpen a fenti feladat m = 0,1 kg tömegre, csak ott a legmélyebb pontban, a parabola csúcspontjában kell a mozgó test által kifejtett összes erőt kiszámítani (5N).



9. ábra

3. A parabolát tekinthetjük egy forgási paraboloid tükör metszetének. Az y tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak ekkor a tükör felületéről visszaverődve, a parabola (illetve a forgási paraboloid) fókuszán haladnak keresztül. A 10. ábrán ugyanis a parabola tengelyével párhuzamos, a $P_0(x_0;ax_0^2)$ pontra érkező fénysugár (a 10. ábrán (1)-gyel jelölve) a parabola érintőjének irányával, (2)-vel, olyan α szöget zár be, melyre ctg α = $\frac{2ax_0^2}{x_0}$ = $2ax_0$



10. ábra

F(0;$\frac{1}{4a}$)-val jelölve a parabola fókuszpontját, FP_0-nak a parabola tengelyével párhuzamos iránnyal, (1)-gyel bezárt β szögére a 10. ábra alapján ezt kapjuk:

$$ctg\beta = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{4a}}{x_0} = \frac{2ax_0}{2} - \frac{1}{4ax_0} = \frac{ctg\alpha}{2} - \frac{1}{2ctg\alpha}$$

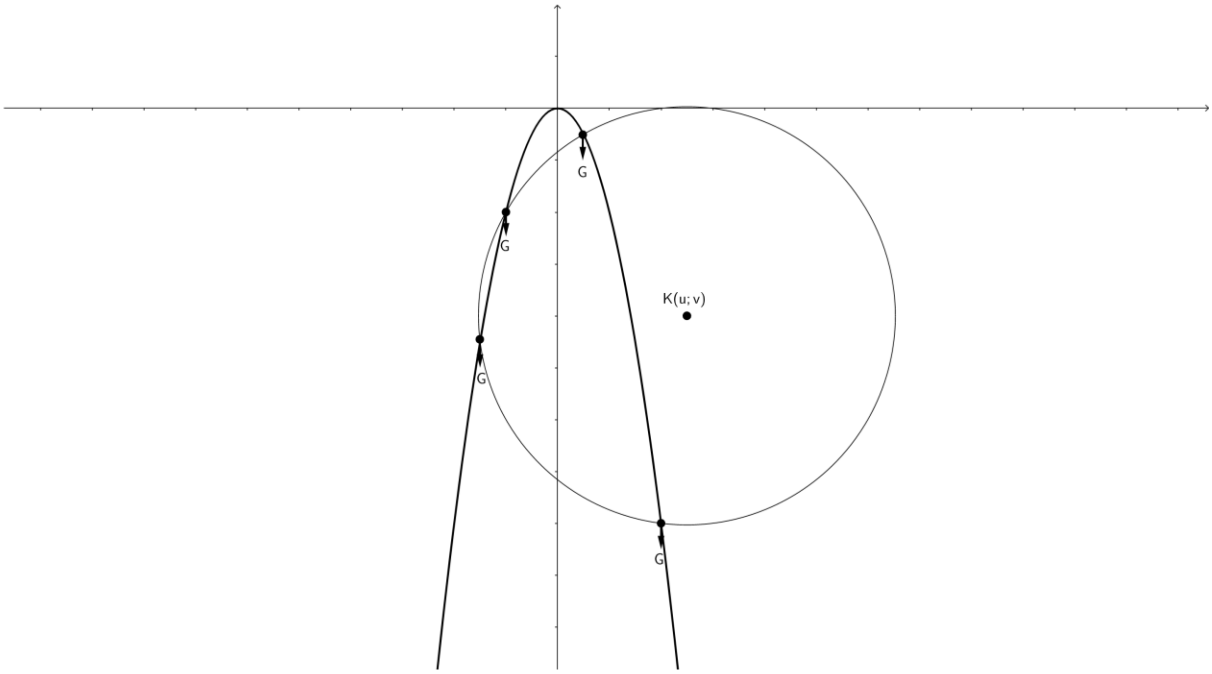
Eszerint:

$$ctg\beta = \frac{ctg\alpha}{2} - \frac{1}{2ctg\alpha} = \frac{ctg^2\,\alpha - 1}{2ctg\alpha} = ctg2\alpha,$$

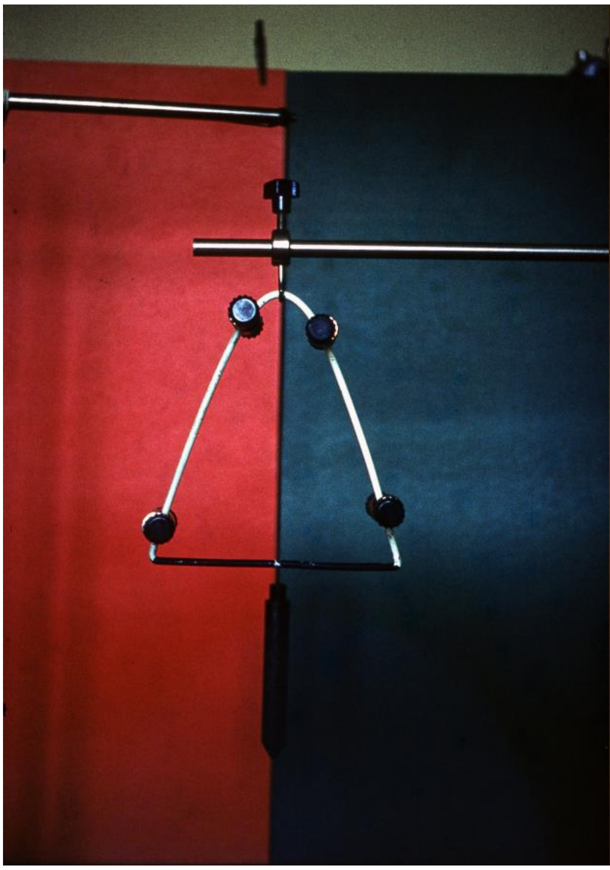
vagyis a visszavert sugár a fényvisszaverődés törvénye alapján a parabola fókuszán halad keresztül.

Az y-tengely körül megforgatva a parabola síkját egy forgási paraboloid tükröt kapunk, amelynek megmarad az F(0;$\frac{1}{4a}$) fókuszpontja. A parabola-síkban a csúcshoz tartozó simulókörből ekkor homorú gömbtükör lesz, amelynek tulajdonképpen nincs fókuszpontja, csak a hozzátartozó forgási paraboloid tükörnek. A 6. ábra szerint a parabola paramétereinek 40%-áig a homorú gömbtükör jó közelítéssel a forgási paraboloid tükörrel egybeesik, így 4-5-szörös nagyításig gyakorlatilag torzításmentes képet ad (borotválkozó tükör). A forgási paraboloidnál ez a 40% $0{,}4^2=0{,}16$, ami már 16%-ot jelent. Csillagászati távcsöveknél ez a közelítés azonban már nem alkalmazható.

4. A parabola és kör kölcsönös helyzeteivel kapcsolatos eredményeinket fizikai kísérletekkel is tudjuk igazolni.
   Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük: a parabola egyenletében $y=ax^2$ –ben legyen $a < 0$, vagyis a parabolát hozzuk olyan helyzetbe, hogy csúcsa az origóban maradjon, fókuszpontja viszont az y-tengely negatív részére kerüljön (lefelé nyitott parabola).
   Drótból készítsünk egy parabola alakú görbét. Sok középiskola szertárában van úgynevezett rotációs sztereometriai készlet; egy forgástestek síkmetszeteit vizsgáló matematikai bemutatókészlet, melynek tartozéka egy ilyen paraboladarab. Csúcspontjában felfüggesztve, ez a szimmetrikus paraboladarab saját súlya miatt úgy áll be biztos egyensúlyi helyzetbe, hogy tengelye függőleges lesz. Ezt a tulajdonságát akkor is megtartja, ha egy, a parabolát metsző kör pontjaiban egyenlő súlyú nehezékekkel terheljük meg (11/a, 11/b, 11/c ábrák).



11/a. ábra

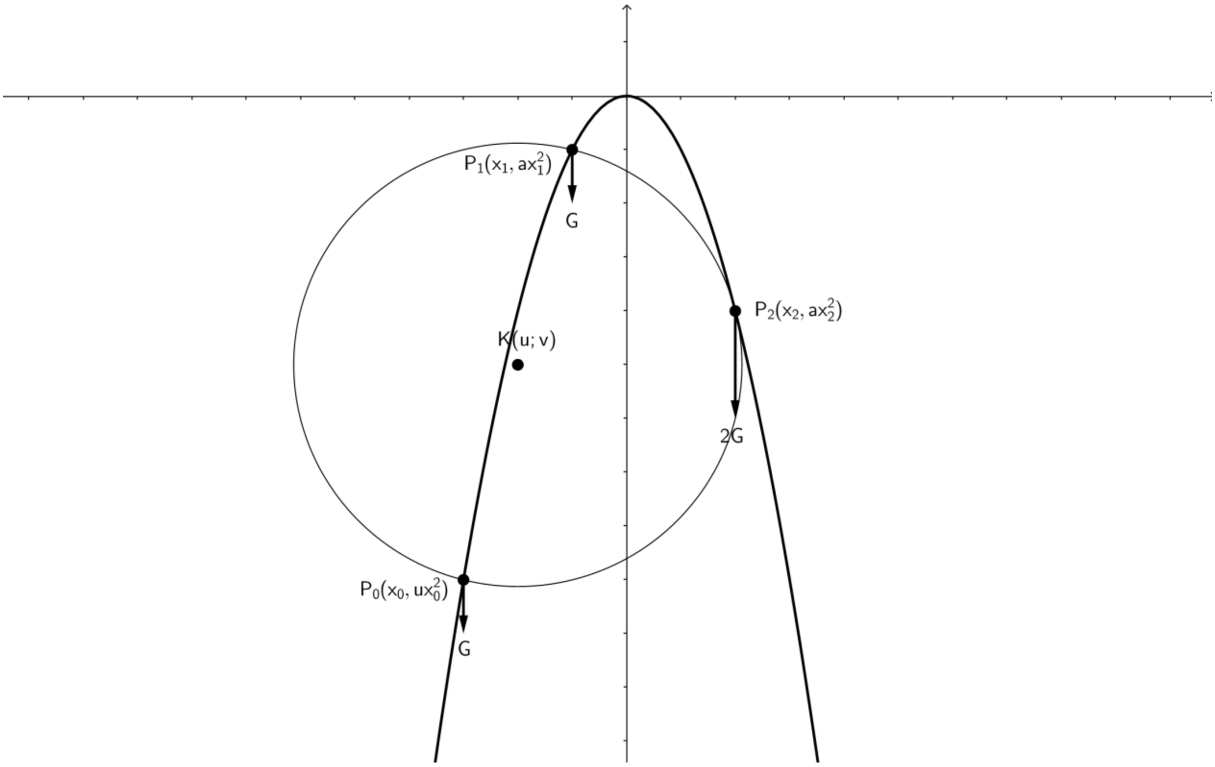


11/b. ábra **11/c. ábra**

Egy biztos egyensúlyi helyzetben levő felfüggesztett merev test ugyanis akkor marad meg biztos egyensúlyi helyzetben, ha a felfüggesztési pontra (forgáspontra) vonatkozó forgatónyomatékok előjeles összege 0. A forgatónyomatékokban (erő · erő karja) ugyanis most az erők (a parabolára rögzített nehezékekre ható nehézségi erők) egyformák, az erőkarokra – az erők támadáspontjának abszcisszáira – viszont, mint láttuk, a Vieta-formula alapján fennáll:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

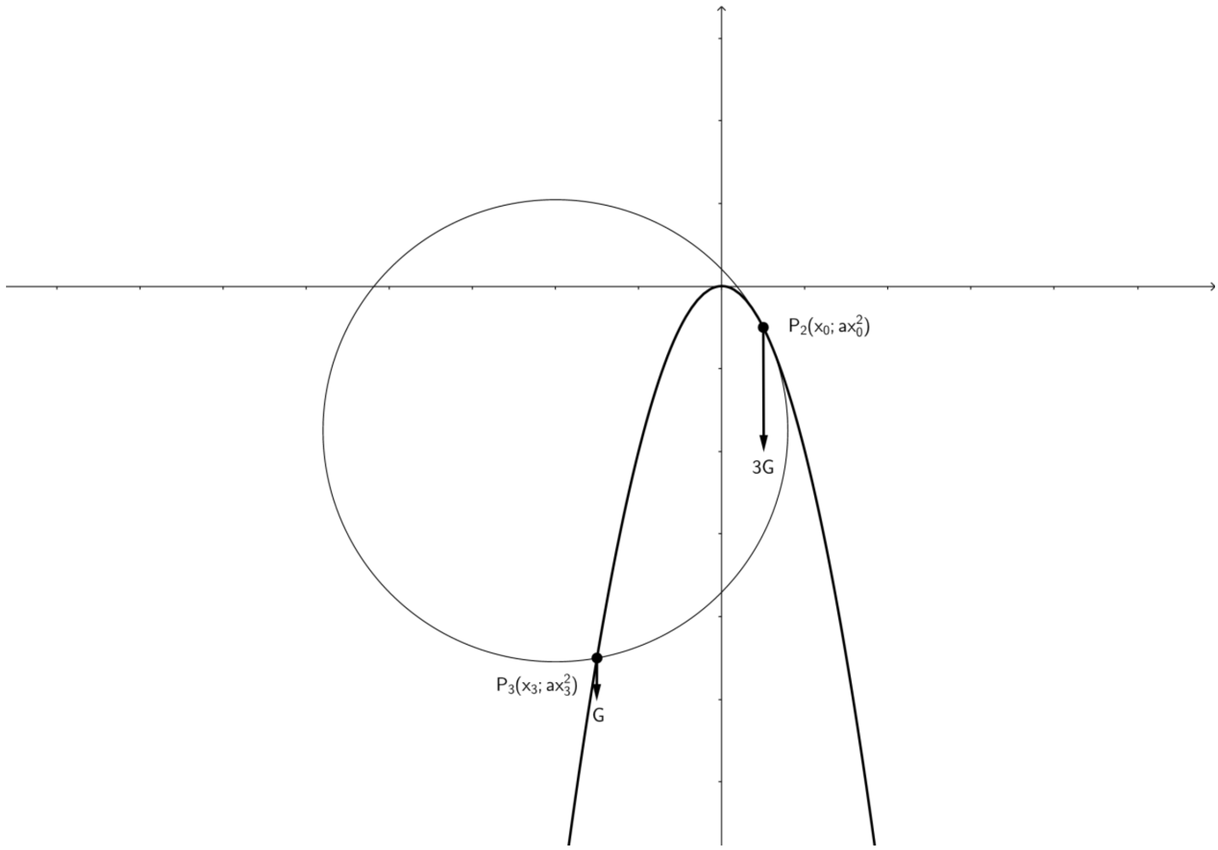
A 12 ábráknak megfelelő helyzetben a P_2 érintési pontba két nehezéket kell tenni. Ekkor $x_0 + x_1 = -2x_2$ (lásd 12.a, 12.b ábrákat)



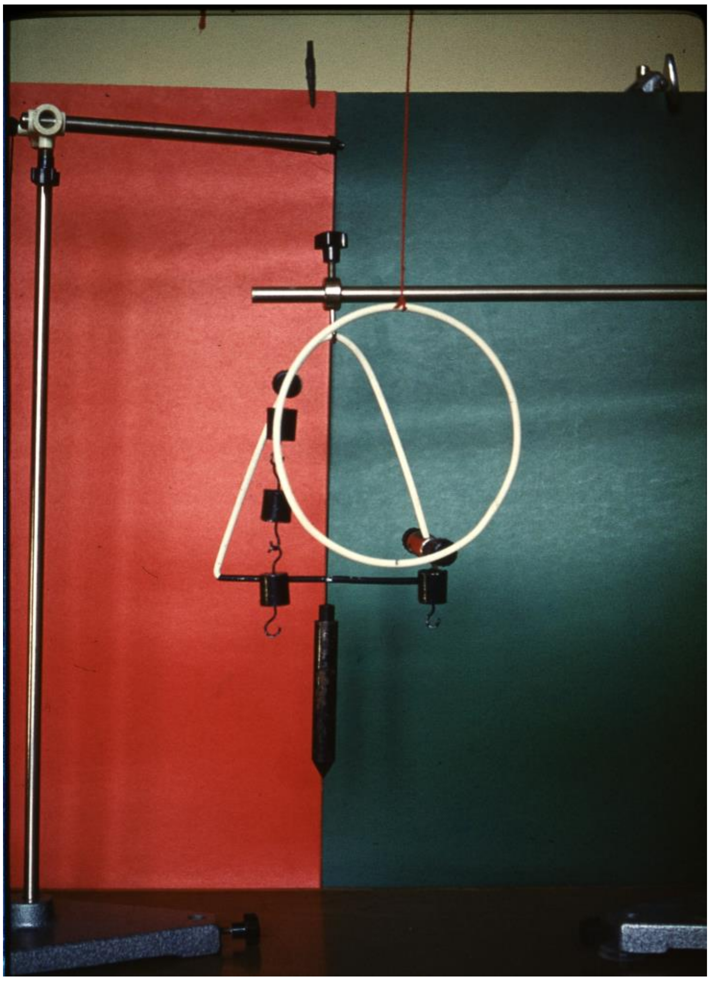
12.a ábra

12.b ábra

Végezetül a simulókörnek megfelelő helyzet (13/a. ábra) és annak kísérleti igazolása látható a 13/b ábrán.



13/a. ábra



13/b. ábra

Irodalom:

[1] Szász Pál: A differenciál és integrálszámítás elemei. Első kötet,
Budapest. 1951
Közoktatásügyi kiadóvállalat
172. oldal, 113§.

[2] J.N. Bronstejn – Szemengyajev: Matematikai Zsebkönyv mérnökök és mérnökhallgatók számára 2. bővített kiadás,
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963; 295. oldal.

[3] Obádovics J. Gyula: Felsőbb matematikai feladatgyűjtemény. Második kiadás
Scolar kiadó, 2002. Budapest. 96-105. oldal.

[4] Dr. Paál Tamás, Soós Károly
Fizika II. (A, B és C variáns)
Szakközépiskola
Tankönyvkiadó, Budapest, 1979, 196-197. oldal.

[5] Középiskolai Matematikai Lapok (KöMaL)
2869. fizikafeladat.

[6] Természettudományi Lexikon, 2. kötet Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965,
„Görbületi kör” címszó.